

Números famosos: El número pi.

Introducción

π (**pi**) es la relación entre las longitudes de una circunferencia y su diámetro, en Geometría euclidiana. Es un número irracional y una de las constantes matemáticas más importantes. Se emplea frecuentemente en matemáticas, física e ingeniería. El valor numérico de π , truncado a sus primeras cifras, es el siguiente:

$$\pi \approx 3,1415926535897932384\dots$$

El valor de π se ha obtenido con diversas aproximaciones a lo largo de la historia, siendo una de las constantes matemáticas que más aparece en las ecuaciones de la física, junto con el número e. Por ello, tal vez sea la constante que más pasiones desata entre los matemáticos profesionales y aficionados. La relación entre la circunferencia y su diámetro no es constante en geometrías no euclídeas.

1.- Momentos históricos más importantes

La búsqueda del mayor número de decimales del número π ha supuesto un esfuerzo constante de numerosos científicos a lo largo de la historia. Algunas aproximaciones históricas de π son las siguientes.

Antiguo Egipto

El valor aproximado de π en las antiguas culturas se remonta a la época del escriba egipcio Ahmes en el año 1800 a. C., descrito en el papiro Rhind, donde se emplea un valor aproximado de π afirmando que: el área de un círculo es similar a la de un cuadrado, cuyo lado es igual al diámetro del círculo disminuido en $1/9$, es decir, igual a $8/9$ del diámetro. En notación moderna:



$$S = \pi r^2 \simeq \left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2 = \frac{64}{81}(4r^2)$$

$$\pi \simeq \frac{256}{81} = 3,16049\dots$$

Antigua Grecia

El matemático griego Arquímedes (siglo III a. C.) fue capaz de determinar el valor de π , entre el intervalo comprendido por $3 \frac{10}{71}$, como valor mínimo, y $3 \frac{1}{7}$, como valor máximo. Con esta aproximación de Arquímedes se obtiene un valor con un error que oscila entre 0,024% y 0,040% sobre el valor real. El método usado por Arquímedes era muy simple y consistía en circunscribir e inscribir polígonos regulares de n -lados en circunferencias y calcular el perímetro de dichos polígonos. Arquímedes empezó con hexágonos circunscritos e inscritos, y fue doblando el número de lados hasta llegar a polígonos de 96 lados.

En el siglo II, Claudio Ptolomeo proporciona un valor fraccionario por aproximaciones:

$$\pi \simeq \frac{377}{120} = 3,1416\dots$$

Renacimiento europeo

A partir del siglo XII, con el uso de cifras arábigas en los cálculos, se facilitó mucho la posibilidad de obtener mejores cálculos para π . El matemático Leonardo Pisano, en su «Practica Geometriae», amplifica el método de Arquímedes, proporcionando un intervalo más estrecho. Algunos matemáticos del siglo XVII, como Vieta, usaron polígonos de hasta 393.216 lados para aproximarse con buena precisión a 3,141592653.

El matemático inglés John Wallis (1616–1703) desarrolló en 1655 la conocida serie *Producto de Wallis*:



$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

De la misma forma Leibniz calculó de una forma más complicada en 1682 la siguiente serie matemática que lleva su nombre:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

2.- El número pi en las diferentes ramas de las matemáticas

Muchos han sido los modos de abordar este número:

En probabilidad

- La probabilidad de que dos enteros positivos escogidos al azar sean primos entre sí es: $6/\pi^2$
- Si se eligen al azar dos números positivos menores que 1, la probabilidad de que junto con el número 1 puedan ser los lados de un triángulo obtusángulo es: $(\pi-2)/4$
- El número medio de formas de escribir un entero positivo como suma de dos cuadrados perfectos es $\pi/4$ (el orden es relevante).

En análisis matemático

- Fórmula de Leibniz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

- Producto de Wallis:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

- Euler:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!^2}{(2n+1)!} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots = \frac{\pi}{2}$$

- También como desarrollo en series:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k 3^{\frac{1}{2}-k}}{2k+1}$$

- Formas de representación aproximada a π

$$\frac{355}{113} = 3.141592\dots$$

$$\sqrt[29]{261424513284461} \approx \pi$$

3.-Aguja de Buffon

Sin lugar a dudas la aproximación empírica más intuitiva es la dada por el naturalista francés Buffon en 1733 y reproducido por él mismo ya resuelto en 1777.

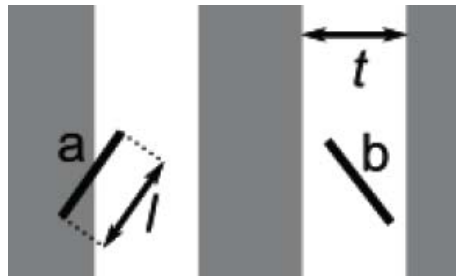
La aguja de Buffon es un clásico problema de probabilidad geométrica, de inmediata realización práctica y cuyo interés radica en que es un método sencillo para ir aproximando el valor del número π a partir de sucesivos intentos.

Se trata de lanzar una aguja de longitud l repetidamente sobre una superficie en la que se han trazado rectas paralelas distanciadas entre sí, en t unidades, de manera uniforme (con $t > l$ de forma que la aguja no pueda tocar dos rectas). Si la aguja se lanza n veces y x de esas cae cruzando una línea, entonces se puede aproximar π , usando el Método de Monte Carlo (Anexo 1), lanzándola gran cantidad de veces:

$$\pi \approx \frac{2nl}{xt}$$

Aunque este resultado es matemáticamente impecable, no puede usarse más que para determinar unos cuantos dígitos de π *experimentalmente*. Para conseguirse sólo tres dígitos correctos (incluyendo el "3" inicial) requiere de millones de lanzamientos, y el número de lanzamientos crece exponencialmente con el número de dígitos deseados. Además, cualquier error en la medida de las longitudes l y t se transfiere directamente como un error en la aproximación de π . Por ejemplo, una diferencia de un simple átomo en una aguja de 10 centímetros podría acarrear errores en el noveno dígito del resultado. En la práctica, incertidumbres en la determinación de si la aguja en realidad cruza una línea que parece estar solo tocándola lleva el límite de precisión alcanzable a mucho menos de 9 dígitos.

Representación del experimento en el modelo de la "aguja de Buffon", se lanzas dos agujas (*a*, *b*) ambas con longitud *l*. En el dibujo la aguja **a** está cruzando la línea mientras que la aguja **b** no.

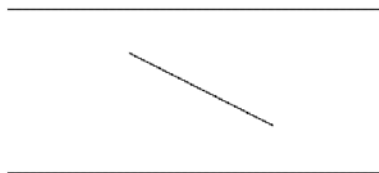


Se trata de lanzar una aguja sobre un papel en el que se han trazado rectas paralelas distanciadas entre sí de manera uniforme. Se puede demostrar que si la distancia entre las rectas es igual a la longitud de la aguja, la probabilidad de que la aguja cruce alguna de las líneas es $2/\pi$. De esa manera:

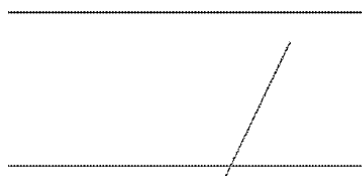
$$\pi = \frac{2N}{A}$$

siendo *N* el número total de intentos y *A* el número de veces que la aguja ha cruzado alguna línea.

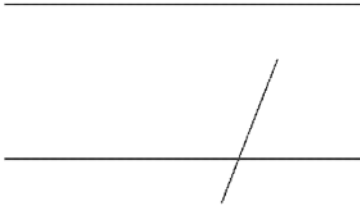
Si hacemos una simulación informática (en este caso hemos utilizado el programa *Java*) obtenemos con una aguja casi cualquier resultado en las estimaciones del número pi. Mostramos aquí algunos ejemplos:



Pi estimate = $K * \text{Drops} / \text{Hits} = 3.1407172679901123$

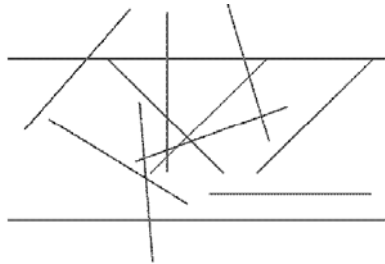


Pi estimate = $K * \text{Drops} / \text{Hits} = 2.0$

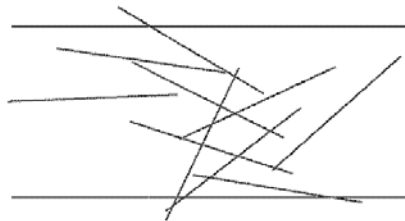


Pi estimate = $K * \text{Drops} / \text{Hits} = 3.1926934719085693$

Con 10 agujas se obtienen también resultados muy lejanos con mucha frecuencia:

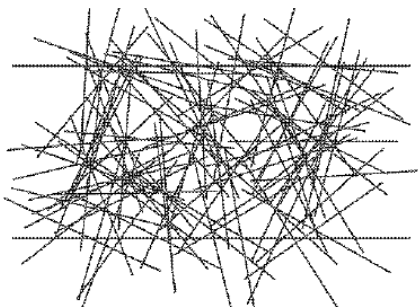


Pi estimate = $K * \text{Drops} / \text{Hits} = 3.1411080360412598$

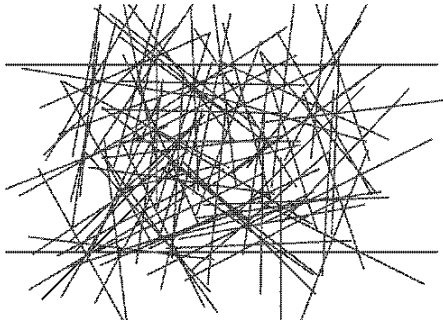


Pi estimate = $K * \text{Drops} / \text{Hits} = 3.1952788829803467$

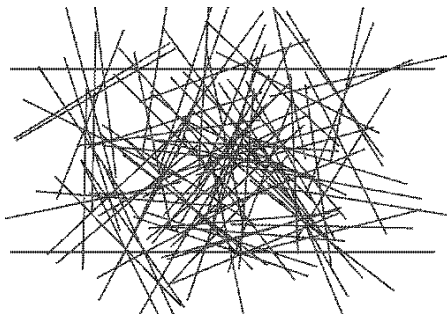
Ya con 100 agujas:



Pi estimate = $K * \text{Drops} / \text{Hits} = 3.167691469192505$

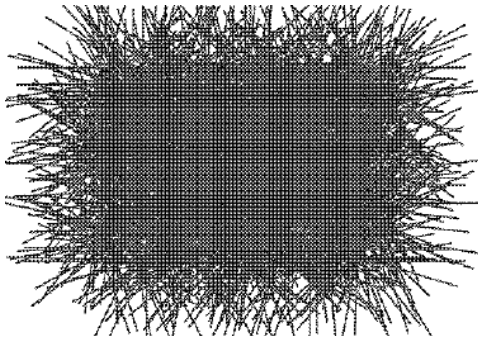


Pi estimate = $K * \text{Drops} / \text{Hits} = 3.1482291221618652$

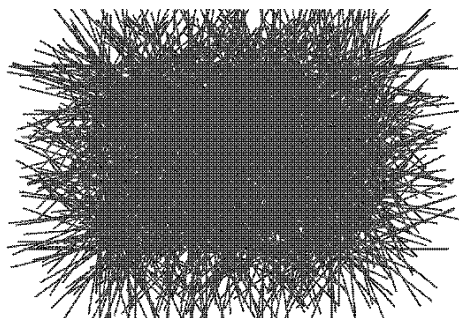


Pi estimate = $K * \text{Drops} / \text{Hits} = 3.2027649879455566$

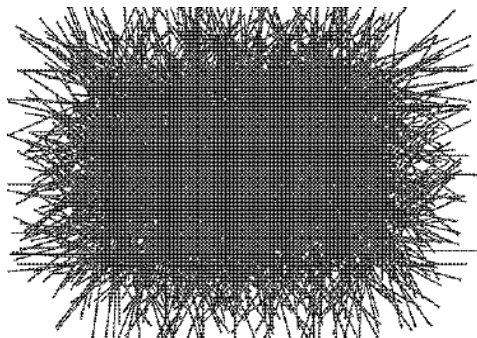
Con 1000 agujas se obtienen dos o tres dígitos correctos con mucha frecuencia:



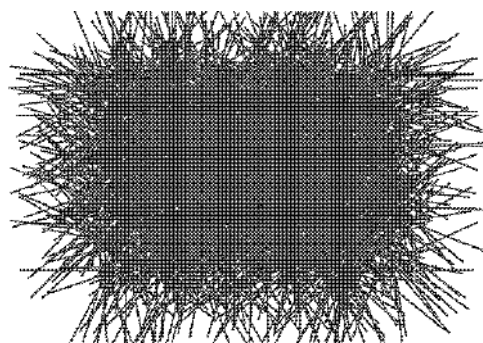
Pi estimate = $K * \text{Drops} / \text{Hits} = 3.1419284343719482$



Pi estimate = $K * \text{Drops} / \text{Hits} = 3.140495777130127$



Pi estimate = K * Drops / Hits = 3.0030031204223633



Pi estimate = K * Drops / Hits = 3.3222591876983643

Si la aguja es más corta que la distancia entre las rectas la probabilidad disminuye proporcionalmente al cociente entre la longitud de la aguja y la distancia entre las rectas, tomando el valor $(2L)/(D \pi)$ donde L es la longitud de la aguja y D la interdistancia entre las rectas. En este caso:

$$\pi = \frac{2NL}{AD}$$

Todavía habría una tercera situación, en que la longitud de la aguja es mayor que la distancia entre las rectas lleva a un resultado bastante más complicado.

Una generalización obvia de este problema es el problema de la Aguja de Buffon-Laplace, donde la aguja, en vez de lanzarse sobre un papel rayado, se lanza sobre una cuadrícula. Se llama de Buffon-Laplace pues aunque Buffon lo resolvió también en 1777, su solución contenía un error. Fue corregido por Laplace en 1812.

Bibliografía

- Webs:

<http://www.wikipedia.org>
<http://www.google.com>

- Libros de consulta:

Castellet, M. y Llerena, J. (1991). *Álgebra y Geometría*. Editorial Reverté.
Gardner, M. *Nuevos pasatiempos matemáticos*. Editorial Alianza Editorial
Rey Pastor, J. y Babini, J. *Historia de la matemática*. Gedisa Editorial
Aspray, W. (1992) *J. Von Neumann y los orígenes de la computación moderna*.
Gedisa Editorial

Anexo 1: Método de Monte Carlo

La invención del método de Monte Carlo se asigna a Stan Ulam y a John von Neumann. Ulam ha explicado cómo se le ocurrió la idea mientras jugaba un solitario durante una enfermedad en 1946. Advirtió que resulta mucho más simple tener una idea del resultado general del solitario haciendo pruebas múltiples con las cartas y contando las proporciones de los resultados que computar todas las posibilidades de combinación formalmente. Se le ocurrió que esta misma observación debía aplicarse a su trabajo de Los Álamos sobre difusión de neutrones, para la cual resulta prácticamente imposible solucionar las ecuaciones íntegro-diferenciales que gobiernan la dispersión, la absorción y la fisión. “La idea consistía en probar con experimentos mentales las miles de posibilidades, y en cada etapa, determinar por casualidad, por un número aleatorio distribuido según las probabilidades, qué sucedería y totalizar todas las posibilidades y tener una idea de la conducta del proceso físico”.

Podían utilizarse máquinas de computación, que comenzaban a estar disponibles, para efectuar las pruebas numéricas y en efecto reemplazar el aparato experimental del físico. A principios de 1947 Von Neumann envió una carta a Richtmyer a Los Álamos en la que expuso de modo influyente tal vez el primer informe por escrito del método de Monte Carlo. Su carta fue encuadrada junto con la respuesta de Richtmyer como un informe de Los Álamos y distribuida entre los miembros del laboratorio. Von Neumann sugería aplicar el método para rastrear la generación isotrópica de neutrones desde una composición variable de material activo a lo largo del radio de una esfera. Sostenía que el problema era adecuado para el ENIAC y

estimaba que llevaría 5 horas calcular la acción de 100 neutrones a través de un curso de 100 colisiones cada uno.

Ulam estaba particularmente interesado en el método Monte Carlo para evaluar integrales múltiples. Una de las primeras aplicaciones de este método a un problema determinista fue llevada a cabo en 1948 por Enrico Fermi, Ulam y von Neumann cuando consideraron los valores singulares de la ecuación de Schrödinger.

Anexo 2: Algunas cifras del número pi

Pi = 3.

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 : 50
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 : 100
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 : 150
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196 : 200
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 : 250
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273 : 300
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 : 350
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 : 400
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548 : 450
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912 : 500

9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798 : 550
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132 : 600
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872 : 650
1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235 : 700
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960 : 750
5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859 : 800
5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881 : 850
7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303 : 900
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 : 950
1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 2164201989 : 1000

3809525720 1065485863 2788659361 5338182796 8230301952 : 1050
0353018529 6899577362 2599413891 2497217752 8347913151 : 1100
5574857242 4541506959 5082953311 6861727855 8890750983 : 1150
8175463746 4939319255 0604009277 0167113900 9848824012 : 1200
8583616035 6370766010 4710181942 9555961989 4676783744 : 1250
9448255379 7747268471 0404753464 6208046684 2590694912 : 1300
9331367702 8989152104 7521620569 6602405803 8150193511 : 1350
2533824300 3558764024 7496473263 9141992726 0426992279 : 1400
6782354781 6360093417 2164121992 4586315030 2861829745 : 1450
5570674983 8505494588 5869269956 9092721079 7509302955 : 1500

3211653449 8720275596 0236480665 4991198818 3479775356 : 1550
6369807426 5425278625 5181841757 4672890977 7727938000 : 1600
8164706001 6145249192 1732172147 7235014144 1973568548 : 1650
1613611573 5255213347 5741849468 4385233239 0739414333 : 1700
4547762416 8625189835 6948556209 9219222184 2725502542 : 1750

5688767179 0494601653 4668049886 2723279178 6085784383 : 1800
8279679766 8145410095 3883786360 9506800642 2512520511 : 1850
7392984896 0841284886 2694560424 1965285022 2106611863 : 1900
0674427862 2039194945 0471237137 8696095636 4371917287 : 1950
4677646575 7396241389 0865832645 9958133904 7802759009 : 2000

9465764078 9512694683 9835259570 9825822620 5224894077 : 2050
2671947826 8482601476 9909026401 3639443745 5305068203 : 2100
4962524517 4939965143 1429809190 6592509372 2169646151 : 2150
5709858387 4105978859 5977297549 8930161753 9284681382 : 2200
6868386894 2774155991 8559252459 5395943104 9972524680 : 2250
8459872736 4469584865 3836736222 6260991246 0805124388 : 2300
4390451244 1365497627 8079771569 1435997700 1296160894 : 2350
4169486855 5848406353 4220722258 2848864815 8456028506 : 2400
0168427394 5226746767 8895252138 5225499546 6672782398 : 2450
6456596116 3548862305 7745649803 5593634568 1743241125 : 2500

1507606947 9451096596 0940252288 7971089314 5669136867 : 2550
2287489405 6010150330 8617928680 9208747609 1782493858 : 2600
9009714909 6759852613 6554978189 3129784821 6829989487 : 2650
2265880485 7564014270 4775551323 7964145152 3746234364 : 2700
5428584447 9526586782 1051141354 7357395231 1342716610 : 2750
2135969536 2314429524 8493718711 0145765403 5902799344 : 2800
0374200731 0578539062 1983874478 0847848968 3321445713 : 2850
8687519435 0643021845 3191048481 0053706146 8067491927 : 2900
8191197939 9520614196 6342875444 0643745123 7181921799 : 2950
9839101591 9561814675 1426912397 4894090718 6494231961 : 3000

5679452080 9514655022 5231603881 9301420937 6213785595 : 3050
6638937787 0830390697 9207734672 2182562599 6615014215 : 3100
0306803844 7734549202 6054146659 2520149744 2850732518 : 3150
6660021324 3408819071 0486331734 6496514539 0579626856 : 3200
1005508106 6587969981 6357473638 4052571459 1028970641 : 3250
4011097120 6280439039 7595156771 5770042033 7869936007 : 3300
2305587631 7635942187 3125147120 5329281918 2618612586 : 3350
7321579198 4148488291 6447060957 5270695722 0917567116 : 3400
7229109816 9091528017 3506712748 5832228718 3520935396 : 3450
5725121083 5791513698 8209144421 0067510334 6711031412 : 3500

6711136990 8658516398 3150197016 5151168517 1437657618 : 3550
3515565088 4909989859 9823873455 2833163550 7647918535 : 3600
8932261854 8963213293 3089857064 2046752590 7091548141 : 3650
6549859461 6371802709 8199430992 4488957571 2828905923 : 3700
2332609729 9712084433 5732654893 8239119325 9746366730 : 3750
5836041428 1388303203 8249037589 8524374417 0291327656 : 3800
1809377344 4030707469 2112019130 2033038019 7621101100 : 3850
4492932151 6084244485 9637669838 9522868478 3123552658 : 3900
2131449576 8572624334 4189303968 6426243410 7732269780 : 3950
2807318915 4411010446 8232527162 0105265227 2111660396 : 4000

6655730925 4711055785 3763466820 6531098965 2691862056 : 4050
4769312570 5863566201 8558100729 3606598764 8611791045 : 4100
3348850346 1136576867 5324944166 8039626579 7877185560 : 4150
8455296541 2665408530 6143444318 5867697514 5661406800 : 4200
7002378776 5913440171 2749470420 5622305389 9456131407 : 4250
1127000407 8547332699 3908145466 4645880797 2708266830 : 4300
6343285878 5698305235 8089330657 5740679545 7163775254 : 4350
2021149557 6158140025 0126228594 1302164715 5097925923 : 4400
0990796547 3761255176 5675135751 7829666454 7791745011 : 4450
2996148903 0463994713 2962107340 4375189573 5961458901 : 4500

9389713111 7904297828 5647503203 1986915140 2870808599 : 4550
0480109412 1472213179 4764777262 2414254854 5403321571 : 4600
8530614228 8137585043 0633217518 2979866223 7172159160 : 4650
7716692547 4873898665 4949450114 6540628433 6639379003 : 4700
9769265672 1463853067 3609657120 9180763832 7166416274 : 4750
8888007869 2560290228 4721040317 2118608204 1900042296 : 4800
6171196377 9213375751 1495950156 6049631862 9472654736 : 4850
4252308177 0367515906 7350235072 8354056704 0386743513 : 4900
6222247715 8915049530 9844489333 0963408780 7693259939 : 4950
7805419341 4473774418 4263129860 8099888687 4132604721 : 5000

5695162396 5864573021 6315981931 9516735381 2974167729 : 5050
4786724229 2465436680 0980676928 2382806899 6400482435 : 5100
4037014163 1496589794 0924323789 6907069779 4223625082 : 5150
2168895738 3798623001 5937764716 5122893578 6015881617 : 5200
5578297352 3344604281 5126272037 3431465319 7777416031 : 5250
9906655418 7639792933 4419521541 3418994854 4473456738 : 5300
3162499341 9131814809 2777710386 3877343177 2075456545 : 5350
3220777092 1201905166 0962804909 2636019759 8828161332 : 5400
3166636528 6193266863 3606273567 6303544776 2803504507 : 5450
7723554710 5859548702 7908143562 4014517180 6246436267 : 5500

9456127531 8134078330 3362542327 8394497538 2437205835 : 5550
3114771199 2606381334 6776879695 9703098339 1307710987 : 5600
0408591337 4641442822 7726346594 7047458784 7787201927 : 5650
7152807317 6790770715 7213444730 6057007334 9243693113 : 5700
8350493163 1284042512 1925651798 0694113528 0131470130 : 5750
4781643788 5185290928 5452011658 3934196562 1349143415 : 5800
9562586586 5570552690 4965209858 0338507224 2648293972 : 5850
8584783163 0577775606 8887644624 8246857926 0395352773 : 5900
4803048029 0058760758 2510474709 1643961362 6760449256 : 5950
2742042083 2085661190 6254543372 1315359584 5068772460 : 6000

2901618766 7952406163 4252257719 5429162991 9306455377 : 6050
9914037340 4328752628 8896399587 9475729174 6426357455 : 6100
2540790914 5135711136 9410911939 3251910760 2082520261 : 6150
8798531887 7058429725 9167781314 9699009019 2116971737 : 6200
2784768472 6860849003 3770242429 1651300500 5168323364 : 6250
3503895170 2989392233 4517220138 1280696501 1784408745 : 6300

1960121228 5993716231 3017114448 4640903890 6449544400 : 6350
6198690754 8516026327 5052983491 8740786680 8818338510 : 6400
2283345085 0486082503 9302133219 7155184306 3545500766 : 6450
8282949304 1377655279 3975175461 3953984683 3936383047 : 6500

4611996653 8581538420 5685338621 8672523340 2830871123 : 6550
2827892125 0771262946 3229563989 8989358211 6745627010 : 6600
2183564622 0134967151 8819097303 8119800497 3407239610 : 6650
3685406643 1939509790 1906996395 5245300545 0580685501 : 6700
9567302292 1913933918 5680344903 9820595510 0226353536 : 6750
1920419947 4553859381 0234395544 9597783779 0237421617 : 6800
2711172364 3435439478 2218185286 2408514006 6604433258 : 6850
8856986705 4315470696 5747458550 3323233421 0730154594 : 6900
0516553790 6866273337 9958511562 5784322988 2737231989 : 6950
8757141595 7811196358 3300594087 3068121602 8764962867 : 7000

4460477464 9159950549 7374256269 0104903778 1986835938 : 7050
1465741268 0492564879 8556145372 3478673303 9046883834 : 7100
3634655379 4986419270 5638729317 4872332083 7601123029 : 7150
9113679386 2708943879 9362016295 1541337142 4892830722 : 7200
0126901475 4668476535 7616477379 4675200490 7571555278 : 7250
1965362132 3926406160 1363581559 0742202020 3187277605 : 7300
2772190055 6148425551 8792530343 5139844253 2234157623 : 7350
3610642506 3904975008 6562710953 5919465897 5141310348 : 7400
2276930624 7435363256 9160781547 8181152843 6679570611 : 7450
0861533150 4452127473 9245449454 2368288606 1340841486 : 7500

3776700961 2071512491 4043027253 8607648236 3414334623 : 7550
5189757664 5216413767 9690314950 1910857598 4423919862 : 7600
9164219399 4907236234 6468441173 9403265918 4044378051 : 7650
3338945257 4239950829 6591228508 5558215725 0310712570 : 7700
1266830240 2929525220 1187267675 6220415420 5161841634 : 7750
8475651699 9811614101 0029960783 8690929160 3028840026 : 7800
9104140792 8862150784 2451670908 7000699282 1206604183 : 7850
7180653556 7252532567 5328612910 4248776182 5829765157 : 7900
9598470356 2226293486 0034158722 9805349896 5022629174 : 7950
8788202734 2092222453 3985626476 6914905562 8425039127 : 8000

5771028402 7998066365 8254889264 8802545661 0172967026 : 8050
6407655904 2909945681 5065265305 3718294127 0336931378 : 8100
5178609040 7086671149 6558343434 7693385781 7113864558 : 8150
7367812301 4587687126 6034891390 9562009939 3610310291 : 8200
6161528813 8437909904 2317473363 9480457593 1493140529 : 8250
7634757481 1935670911 0137751721 0080315590 2485309066 : 8300
9203767192 2033229094 3346768514 2214477379 3937517034 : 8350
4366199104 0337511173 5471918550 4644902636 5512816228 : 8400
8244625759 1633303910 7225383742 1821408835 0865739177 : 8450
1509682887 4782656995 9957449066 1758344137 5223970968 : 8500

3408005355 9849175417 3818839994 4697486762 6551658276 : 8550
5848358845 3142775687 9002909517 0283529716 3445621296 : 8600
4043523117 6006651012 4120065975 5851276178 5838292041 : 8650
9748442360 8007193045 7618932349 2292796501 9875187212 : 8700
7267507981 2554709589 0455635792 1221033346 6974992356 : 8750
3025494780 2490114195 2123828153 0911407907 3860251522 : 8800
7429958180 7247162591 6685451333 1239480494 7079119153 : 8850
2673430282 4418604142 6363954800 0448002670 4962482017 : 8900
9289647669 7583183271 3142517029 6923488962 7668440323 : 8950
2609275249 6035799646 9256504936 8183609003 2380929345 : 9000

9588970695 3653494060 3402166544 3755890045 6328822505 : 9050
4525564056 4482465151 8754711962 1844396582 5337543885 : 9100
6909411303 1509526179 3780029741 2076651479 3942590298 : 9150
9695946995 5657612186 5619673378 6236256125 2163208628 : 9200
6922210327 4889218654 3648022967 8070576561 5144632046 : 9250
9279068212 0738837781 4233562823 6089632080 6822246801 : 9300
2248261177 1858963814 0918390367 3672220888 3215137556 : 9350
0037279839 4004152970 0287830766 7094447456 0134556417 : 9400
2543709069 7939612257 1429894671 5435784687 8861444581 : 9450
2314593571 9849225284 7160504922 1242470141 2147805734 : 9500

5510500801 9086996033 0276347870 8108175450 1193071412 : 9550
2339086639 3833952942 5786905076 4310063835 1983438934 : 9600
1596131854 3475464955 6978103829 3097164651 4384070070 : 9650
7360411237 3599843452 2516105070 2705623526 6012764848 : 9700
3084076118 3013052793 2054274628 6540360367 4532865105 : 9750
7065874882 2569815793 6789766974 2205750596 8344086973 : 9800
5020141020 6723585020 0724522563 2651341055 9240190274 : 9850
2162484391 4035998953 5394590944 0704691209 1409387001 : 9900
2645600162 3742880210 9276457931 0657922955 2498872758 : 9950
4610126483 6999892256 9596881592 0560010165 5256375678 : 10000

5667227966 1988578279 4848855834 3975187445 4551296563 : 10050
4434803966 4205579829 3680435220 2770984294 2325330225 : 10100
7634180703 9476994159 7915945300 6975214829 3366555661 : 10150
5678736400 5366656416 5473217043 9035213295 4352916941 : 10200
4599041608 7532018683 7937023488 8689479151 0716378529 : 10250
0234529244 0773659495 6305100742 1087142613 4974595615 : 10300
1384987137 5704710178 7957310422 9690666702 1449863746 : 10350
4595280824 3694457897 7233004876 4765241339 0759204340 : 10400
1963403911 4732023380 7150952220 1068256342 7471646024 : 10450
3354400515 2126693249 3419673977 0415956837 5355516673 : 10500

0273900749 7297363549 6453328886 9844061196 4961627734 : 10550
4951827369 5588220757 3551766515 8985519098 6665393549 : 10600
4810688732 0685990754 0792342402 3009259007 0173196036 : 10650
2254756478 9406475483 4664776041 1463233905 6513433068 : 10700
4495397907 0903023460 4614709616 9688688501 4083470405 : 10750
4607429586 9913829668 2468185710 3188790652 8703665083 : 10800

2431974404 7718556789 3482308943 1068287027 2280973624 : 10850
8093996270 6074726455 3992539944 2808113736 9433887294 : 10900
0630792615 9599546262 4629707062 5948455690 3471197299 : 10950
6409089418 0595343932 5123623550 8134949004 3642785271 : 11000

3831591256 8989295196 4272875739 4691427253 4366941532 : 11050
3610045373 0488198551 7065941217 3524625895 4873016760 : 11100
0298865925 7866285612 4966552353 3829428785 4253404830 : 11150
8330701653 7228563559 1525347844 5981831341 1290019992 : 11200
0598135220 5117336585 6407826484 9427644113 7639386692 : 11250
4803118364 4536985891 7544264739 9882284621 8449008777 : 11300
6977631279 5722672655 5625962825 4276531830 0134070922 : 11350
3343657791 6012809317 9401718598 5999338492 3549564005 : 11400
7099558561 1349802524 9906698423 3017350358 0440811685 : 11450
5265311709 9570899427 3287092584 8789443646 0050410892 : 11500

2669178352 5870785951 2983441729 5351953788 5534573742 : 11550
6085902908 1765155780 3905946408 7350612322 6112009373 : 11600
1080485485 2635722825 7682034160 5048466277 5045003126 : 11650
2008007998 0492548534 6941469775 1649327095 0493463938 : 11700
2432227188 5159740547 0214828971 1177792376 1225788734 : 11750
7718819682 5462981268 6858170507 4027255026 3329044976 : 11800
2778944236 2167411918 6269439650 6715157795 8675648239 : 11850
9391760426 0176338704 5499017614 3641204692 1823707648 : 11900
8783419689 6861181558 1587360629 3860381017 1215855272 : 11950
6683008238 3404656475 8804051380 8016336388 7421637140 : 12000

6435495561 8689641122 8214075330 2655100424 1048967835 : 12050
2858829024 3670904887 1181909094 9453314421 8287661810 : 12100
3100735477 0549815968 0772009474 6961343609 2861484941 : 12150
7850171807 7930681085 4690009445 8995279424 3981392135 : 12200
0558642219 6483491512 6390128038 3200109773 8680662877 : 12250
9239718014 6134324457 2640097374 2570073592 1003154150 : 12300
8936793008 1699805365 2027600727 7496745840 0283624053 : 12350
4603726341 6554259027 6018348403 0681138185 5105979705 : 12400
6640075094 2608788573 5796037324 5141467867 0368809880 : 12450
6097164258 4975951380 6930944940 1515422221 9432913021 : 12500

7391253835 5915031003 3303251117 4915696917 4502714943 : 12550
3151558854 0392216409 7229101129 0355218157 6282328318 : 12600
2342548326 1119128009 2825256190 2052630163 9114772473 : 12650
3148573910 7775874425 3876117465 7867116941 4776421441 : 12700
1112635835 5387136101 1023267987 7564102468 2403226483 : 12750
4641766369 8066378576 8134920453 0224081972 7856471983 : 12800
9630878154 3221166912 2464159117 7673225326 4335686146 : 12850
1865452226 8126887268 4459684424 1610785401 6768142080 : 12900
8850280054 1436131462 3082102594 1737562389 9420757136 : 12950
2751674573 1891894562 8352570441 3354375857 5342698699 : 13000

4725470316 5661399199 9682628247 2706413362 2217892390 : 13050
3176085428 9437339356 1889165125 0424404008 9527198378 : 13100
7386480584 7268954624 3882343751 7885201439 5600571048 : 13150
1194988423 9060613695 7342315590 7967034614 9143447886 : 13200
3604103182 3507365027 7859089757 8272731305 0488939890 : 13250
0992391350 3373250855 9826558670 8924261242 9473670193 : 13300
9077271307 0686917092 6462548423 2407485503 6608013604 : 13350
6689511840 0936686095 4632500214 5852930950 0009071510 : 13400
5823626729 3264537382 1049387249 9669933942 4685516483 : 13450
2611341461 1068026744 6637334375 3407642940 2668297386 : 13500

5220935701 6263846485 2851490362 9320199199 6882851718 : 13550
3953669134 5222444708 0459239660 2817156551 5656661113 : 13600
5982311225 0628905854 9145097157 5539002439 3153519090 : 13650
2107119457 3002438801 7661503527 0862602537 8817975194 : 13700
7806101371 5004489917 2100222013 3501310601 6391541589 : 13750
5780371177 9277522597 8742891917 9155224171 8958536168 : 13800
0594741234 1933984202 1874564925 6443462392 5319531351 : 13850
0331147639 4911995072 8584306583 6193536932 9699289837 : 13900
9149419394 0608572486 3968836903 2655643642 1664425760 : 13950
7914710869 9843157337 4964883529 2769328220 7629472823 : 14000

8153740996 1545598798 2598910937 1712621828 3025848112 : 14050
3890119682 2142945766 7580718653 8065064870 2613389282 : 14100
2994972574 5303328389 6381843944 7707794022 8435988341 : 14150
0035838542 3897354243 9564755568 4095224844 5541392394 : 14200
1000162076 9363684677 6413017819 6593799715 5746854194 : 14250
6334893748 4391297423 9143365936 0410035234 3777065888 : 14300
6778113949 8616478747 1407932638 5873862473 2889645643 : 14350
5987746676 3847946650 4074111825 6583788784 5485814896 : 14400
2961273998 4134427260 8606187245 5452360643 1537101127 : 14450
4680977870 4464094758 2803487697 5894832824 1239292960 : 14500

5829486191 9667091895 8089833201 2103184303 4012849511 : 14550
6203534280 1441276172 8583024355 9830032042 0245120728 : 14600
7253558119 5840149180 9692533950 7577840006 7465526031 : 14650
4461670508 2768277222 3534191102 6341631571 4740612385 : 14700
0425845988 4199076112 8725805911 3935689601 4316682831 : 14750
7632356732 5417073420 8173322304 6298799280 4908514094 : 14800
7903688786 8789493054 6955703072 6190095020 7643349335 : 14850
9106024545 0864536289 3545686295 8531315337 1838682656 : 14900
1786227363 7169757741 8302398600 6591481616 4049449650 : 14950
1173213138 9574706208 8474802365 3710311508 9842799275 : 15000

4426853277 9743113951 4357417221 9759799359 6852522857 : 15050
4526379628 9612691572 3579866205 7340837576 6873884266 : 15100
4059909935 0500081337 5432454635 9675048442 3528487470 : 15150
1443545419 5762584735 6421619813 4073468541 1176688311 : 15200
8654489377 6979566517 2796623267 1481033864 3913751865 : 15250
9467300244 3450054499 5399742372 3287124948 3470604406 : 15300

3471606325 8306498297 9551010954 1836235030 3094530973 : 15350
3583446283 9476304775 6450150085 0757894954 8931393944 : 15400
8992161255 2559770143 6858943585 8775263796 2559708167 : 15450
7643800125 4365023714 1278346792 6101995585 2247172201 : 15500

7772370041 7808419423 9487254068 0155603599 8390548985 : 15550
7235467456 4239058585 0216719031 3952629445 5439131663 : 15600
1345308939 0620467843 8778505423 9390524731 3620129476 : 15650
9187497519 1011472315 2893267725 3391814660 7300089027 : 15700
7689631148 1090220972 4520759167 2970078505 8071718638 : 15750
1054967973 1001678708 5069420709 2232908070 3832634534 : 15800
5203802786 0990556900 1341371823 6837099194 9516489600 : 15850
7550493412 6787643674 6384902063 9640197666 8559233565 : 15900
4639138363 1857456981 4719621084 1080961884 6054560390 : 15950
3845534372 9141446513 4749407848 8442377217 5154334260 : 16000