Temas para la Educación
revista digital para profesionales de la enseñanza
Nº 9 - Julio 2010 | Federación de Enseñanza de CC.OO. de Andalucía | ISNN: 1989-4023 | Dep. Leg.: GR 2786-2008

Una aproximación al método de la bisección con la hoja de cálculo Calc

José Luis Mellado-Romero

1. Introducción

Dada una función real de variable real $f:[a,b]\rightarrow\Re$, el método de la bisección es un método numérico utilizado para resolver la ecuación $f(x)=0 \; con \; x\in[a,b]$ bajo la hipótesis de continuidad de la función en el intervalo [a,b]. Este método supone un algoritmo fácilmente implementable en cualquier lenguaje de programación, ahora bien, su implementación en la hoja de cálculo Cal además de ser relativamente fácil, permite una adecuada visualización de todos los resultados de forma casi inmediata y permite una presentación de la solución de los resultados bastante amigable para el usuario.

El objetivo de este documento es ofrecer una visión práctica de este método de búsqueda de ceros de funciones de forma numérica con ayuda de la hoja electrónica, como primerísima aplicación del teorema de Bolzano en el bachillerato y para constatar la importancia de la continuidad de funciones, no sólo para garantizar la existencia de la solución sino para ofrecer una aproximación con la precisión elegida por el usuario.

2. El teorema de Bolzano

Bernardo Bolzano (1781-1848), sacerdote católico, que hizo aportaciones importantes a las matemáticas en la primera mitad del siglo XIX, fue uno de los primeros matemáticos en reconocer que muchas de las propiedades sobre funciones contínuas que parecían obvias requerían de una demostración.

El cuerpo teórico en el que se basa el método de la bisección es el famoso teorema de Bolzano cuyo enunciado puede encontrase en cualquier libro de análisis matemático.

Teorema de Bolzano: Sea f una función Real de variable Real, continua en cada punto del intervalo cerrado [a,b] y supongamos que f(a) y f(b) tienen signos opuestos. Existe entonces un c en el intervalo abierto (a,b) tal que f(c)=0, a este c se le llama cero o raíz de f en [a,b].

$$f:[a,b]\rightarrow\Re\ Continua \quad y \quad f(a)\cdot f(b)<0\rightarrow\exists c\in(a,b)/f(c)=0$$

Este teorema se conoce también como el teorema del cero intermedio.

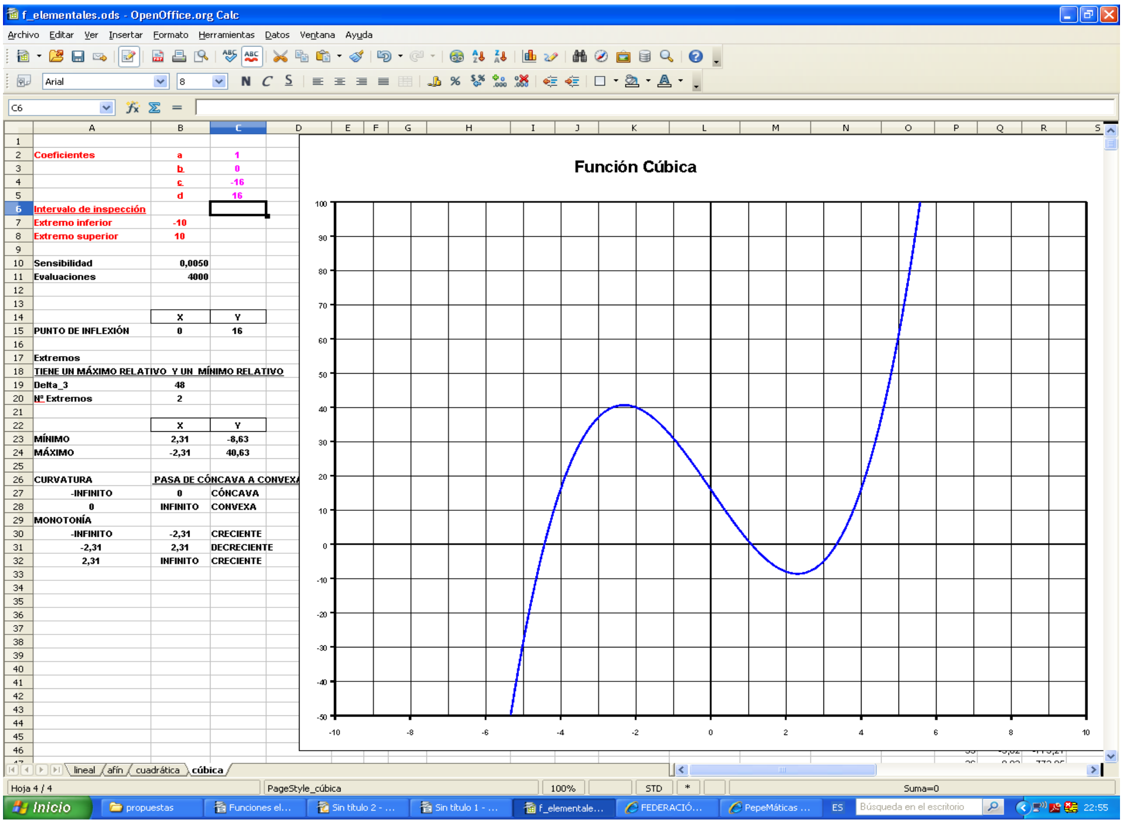


Imagen 1

Intuitivamente se puede apreciar en el grafo ofrecido por la imagen 1, que la función corresponde con una función continua. Ciertamente corresponde con la función cúbica , de expresión analítica $f(x)=x^3-16\cdot x+16$ y se deduce que f(2)=-8 por lo que está por debajo del eje de abcisas y que f(4)=16, por lo que está por encima. En este caso el teorema de Bolzano afirma que la curva ha de cortar al eje de abcisas en algún punto del intervalo (2,4), que puede observarse en el grafo de la imagen 1. Además puede observarse que la función representada tiene 3 ceros o raíces, pues la curva corta en tres puntos al eje de abcisas.

Definición

Dada la ecuación $f(x)=0$ se dice que una raíz de la ecuación ha sido separada si se ha encontrado un intervalo [a,b] que contiene esta raíz y ninguna otra.

La representación gráfica de la función[1] que deseamos considerar es una herramienta muy útil para separar raíces, si bien se pueden utilizar otro tipo de herramientas que sólo precisen de la inyectividad de la función[2].

En la imagen 1 se puede observar que en cada intervalo [-5,-4], [0,2] y [3,4] la ecuación $f(x)=0$ presenta una única raíz.

3. El método de la bisección o de la búsqueda binaria

Este método consiste en ir dividiendo el intervalo por la mitad, evaluando la función en el punto medio del intervalo, y elegir , caso de que este punto medio no sea cero de la función, el intervalo de los dos obtenidos cuyos extremos tengan las imágenes con signos opuestos. Así se garantiza que el cero de la función está en el intervalo considerado. Este procedimiento se repite hasta que la diferencia entre los extremos del intervalo hallado sea menor que un valor fijado previamente, y que llamaremos precisión de la solución.

El algoritmo consiste en construir una sucesión de puntos c_n contenida en el intervalo [a,b] talque $\forall n \in N \; c_n \in [a,b] \;\; y \; \lim_{n\rightarrow+\infty} c_n = c$, de forma que al considerar un n_0 tal que la distancia entre la aproximación hasta la etapa n_0 y el verdadero valor del cero sea inferior a la precisión δ , es decir, $|c_{n_0}-c|<\delta$, y entonces se pueda considerar c_{n_0} como una aproximación válida a la solución para

1 En este caso se ha representado con la hoja de cálculo Calc. Se puede utilizar otro software.
2 Se puede demostrar que bajo la hipótesis de continuidad, una función es inyectiva o uno-uno si es monótona creciente o monótona decreciente.

el error máximo fijado por el usuario y que notaremos por $\delta > 0$, a esta aproximación obtenida se le llamará en el presente documento como $\tilde{x}(\delta) = c_{n_0}$ de tal forma que $|\tilde{x}(\delta) - c| = |c_{n_0} - c| < \delta$.

Se comprobará que este $n_0 \in \mathbb{N}$ se puede determinar con sólo utilizar la expresión:

$$n_0(\delta, a, b) = E\left[\log_2\left(\frac{b-a}{\delta}\right)\right] = E\left[\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\delta}\right)}{\ln(2)}\right] \quad (1)$$

donde E[x] es la parte entera de x.

4. El algoritmo

El algoritmo de resolución puede resumirse en los siguientes pasos :

1.Defino $a_0 = a; b_0 = b; c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}; n = 0$

2.Nombro $\hat{a} = a_n; \hat{b} = b_n; \hat{c} = c_n$

3.Evalúo $f(\hat{c})$

a) $si\ f(\hat{c}) = 0; Fin \rightarrow\ \tilde{x} = \hat{c}$ solución exacta en la iteración n.

b) $Si\ f(\hat{c}) \neq 0$

•Si $f(\hat{a}) \cdot f(\hat{c}) < 0$; en este caso el cero se encuentra en el intervalo $(\hat{a}, \hat{c})$ y se redefine el nuevo intervalo de búsqueda definiendo los extremos del intervalo (a_{n+1}, b_{n+1}) de la siguiente forma: $a_{n+1} = \hat{a}; b_{n+1} = \hat{c}; c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$ .Se incrementa el valor de n una unidad.

•Si $f(\hat{a}) \cdot f(\hat{c}) > 0$ el cero se encuentra en el intervalo $(\hat{c}, \hat{b})$ y se redefine el nuevo intervalo de búsqueda definiendo los extremos del intervalo (a_{n+1}, b_{n+1}) de la siguiente forma: $a_{n+1} = \hat{c}; b_{n+1} = \hat{b}; c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$ .Se incrementa el valor de n una unidad.

c)

•Evalúo $si\ \ b_{n+1}-a_{n+1}<\delta\rightarrow Fin\ \ \tilde{x}(\delta)=c_{n+1}$ En este caso se ha considerado la precisión δ como un umbral lo suficientemente pequeño de forma que se considere todo valor del intervalo (a_{n+1},b_{n+1}) está lo suficientemente próximo a c_{n+1} .

•Si $b_{n+1}-a_{n+1}\geq\delta\rightarrow$ defino $\hat{a}=a_{n+1};\hat{b}=b_{n+1};\hat{c}=c_{n+1}$ ir al paso 3.

Resultados del algoritmo:

De esta manera se obtienen tres sucesiones donde $c_n\in(a_n,b_n);\,c_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ y de forma que cumplen:

$$a_0\leq a_1\leq a_2\leq a_3\leq\ldots\leq a_n\leq c_n\leq b_n\leq\ldots\leq b_3\leq b_2\leq b_1\leq b_0\ \forall\, n\in N$$

Además, se puede comprobar que : $\forall\, n\in N\ \ \ b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{b_n-a_n}{2}$ por lo que se llega a la igualdad $\forall\, n\in N\ \ b_n-a_n=\dfrac{b_0-a_0}{2^n}=\dfrac{b-a}{2^n}$ pero como la distancia entre c (el cero de la función) y c_n no puede ser mayor que $\dfrac{b_n-a_n}{2}$, porque

$$c\in(a_n,c_n)\ \ ó\ \ c\in(c_n,b_n)\rightarrow|c-c_n|<\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}=\frac{b-a}{2^{n+1}}$$

, por tanto si se desea una precisión determinada, ésta se puede asegurar tomando $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}<\delta\rightarrow|c-c_n|<\delta$, se llega pues, a una precisión menor que la deseada, por lo que se puede calcular el número de iteraciones[3] necesarias antes de efectuarlas. Este cálculo se obtiene de la fórmula siguiente:

3 El número de iteraciones no depende de la función pero sí de la longitud del intervalo.

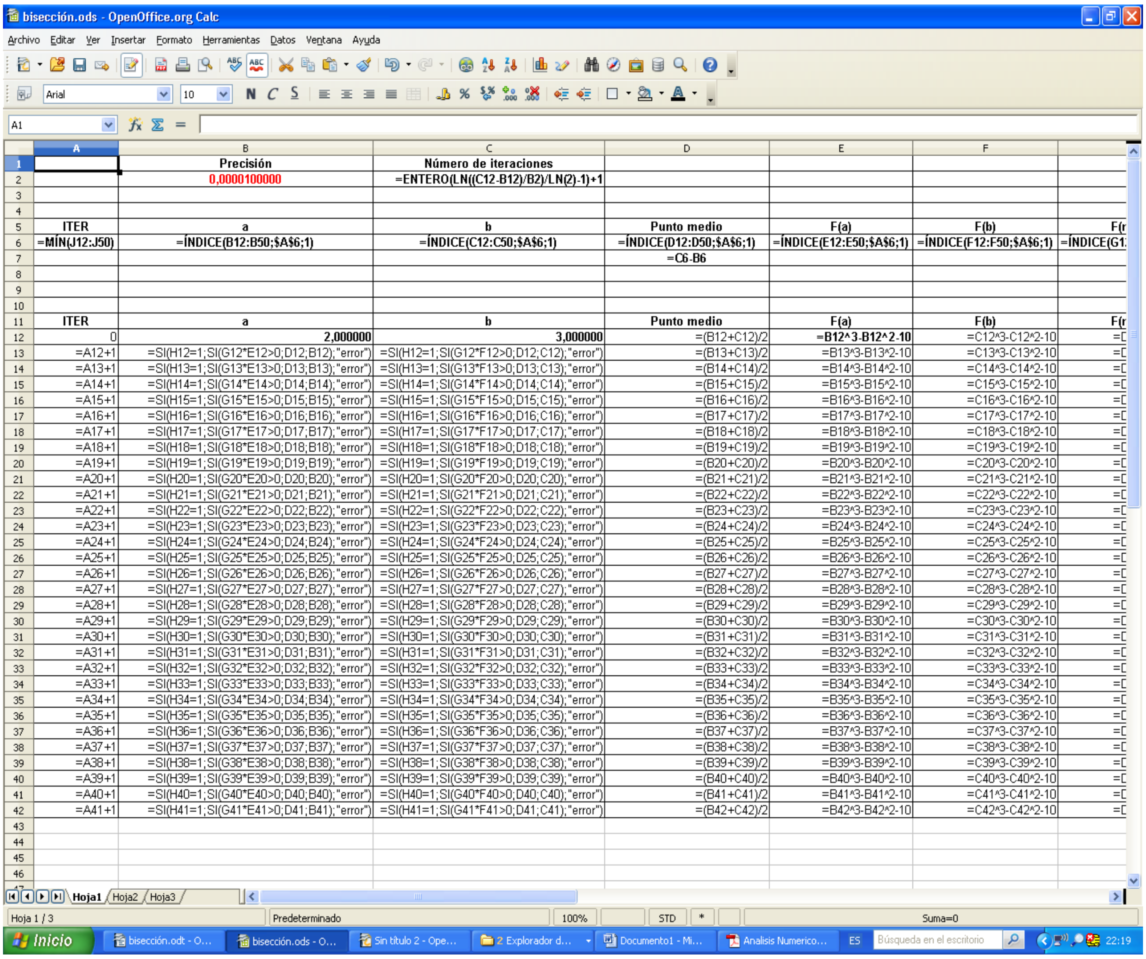
$$\frac{b-a}{2^{n+1}}<\delta\rightarrow\frac{b-a}{\delta}<2^{n+1}\rightarrow n+1>\log_2(\frac{b-a}{\delta})=\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\delta}\right)}{\ln(2)}$$, se obtiene, pues, de esta manera el número de iteraciones necesarias para obtener una aproximación con la precisión fijada δ , este número es el primer entero n que cumple la siguiente desigualdad :

$$n>\log_2(\frac{b-a}{\delta})-1=\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\delta}\right)}{\ln(2)}-1$$

que por definición es la parte entera de $\frac{\ln\left(\frac{b-a}{\delta}\right)}{\ln(2)}$

5. Explicación de la programación de la hoja electrónica

La hoja de cálculo programada para poder obtener una aproximación de hasta las diezmilésimas de la solución de la ecuación $x^3 - x^2 - 10 = 0 \quad x \in [2,3]$.



	A	B	C	D	E	F	G
1		Precisión	Número de iteraciones				
2		0,0000100000	=ENTERO(LN((C12-B12)/B2)/LN(2)-1)+1				
3							
4							
5	ITER	a	b	Punto medio	F(a)	F(b)	F(r
6	=MÍN(J12:J50)	=ÍNDICE(B12:B50;A6;1)	=ÍNDICE(C12:C50;A6;1)	=ÍNDICE(D12:D50;A6;1)	=ÍNDICE(E12:E50;A6;1)	=ÍNDICE(F12:F50;A6;1)	=ÍNDICE(G1
7				=C6-B6			
8							
9							
10							
11	ITER	a	b	Punto medio	F(a)	F(b)	F(r
12	0	2,000000	3,000000	=(B12+C12)/2	=B12^3-B12^2-10	=C12^3-C12^2-10	=D
13	=A12+1	=SI(H12=1;SI(G12*E12>0;D12;B12);"error")	=SI(H12=1;SI(G12*F12>0;D12;C12);"error")	=(B13+C13)/2	=B13^3-B13^2-10	=C13^3-C13^2-10	=D
14	=A13+1	=SI(H13=1;SI(G13*E13>0;D13;B13);"error")	=SI(H13=1;SI(G13*F13>0;D13;C13);"error")	=(B14+C14)/2	=B14^3-B14^2-10	=C14^3-C14^2-10	=D
15	=A14+1	=SI(H14=1;SI(G14*E14>0;D14;B14);"error")	=SI(H14=1;SI(G14*F14>0;D14;C14);"error")	=(B15+C15)/2	=B15^3-B15^2-10	=C15^3-C15^2-10	=D
16	=A15+1	=SI(H15=1;SI(G15*E15>0;D15;B15);"error")	=SI(H15=1;SI(G15*F15>0;D15;C15);"error")	=(B16+C16)/2	=B16^3-B16^2-10	=C16^3-C16^2-10	=D
17	=A16+1	=SI(H16=1;SI(G16*E16>0;D16;B16);"error")	=SI(H16=1;SI(G16*F16>0;D16;C16);"error")	=(B17+C17)/2	=B17^3-B17^2-10	=C17^3-C17^2-10	=D
18	=A17+1	=SI(H17=1;SI(G17*E17>0;D17;B17);"error")	=SI(H17=1;SI(G17*F17>0;D17;C17);"error")	=(B18+C18)/2	=B18^3-B18^2-10	=C18^3-C18^2-10	=D
19	=A18+1	=SI(H18=1;SI(G18*E18>0;D18;B18);"error")	=SI(H18=1;SI(G18*F18>0;D18;C18);"error")	=(B19+C19)/2	=B19^3-B19^2-10	=C19^3-C19^2-10	=D
20	=A19+1	=SI(H19=1;SI(G19*E19>0;D19;B19);"error")	=SI(H19=1;SI(G19*F19>0;D19;C19);"error")	=(B20+C20)/2	=B20^3-B20^2-10	=C20^3-C20^2-10	=D
21	=A20+1	=SI(H20=1;SI(G20*E20>0;D20;B20);"error")	=SI(H20=1;SI(G20*F20>0;D20;C20);"error")	=(B21+C21)/2	=B21^3-B21^2-10	=C21^3-C21^2-10	=D
22	=A21+1	=SI(H21=1;SI(G21*E21>0;D21;B21);"error")	=SI(H21=1;SI(G21*F21>0;D21;C21);"error")	=(B22+C22)/2	=B22^3-B22^2-10	=C22^3-C22^2-10	=D
23	=A22+1	=SI(H22=1;SI(G22*E22>0;D22;B22);"error")	=SI(H22=1;SI(G22*F22>0;D22;C22);"error")	=(B23+C23)/2	=B23^3-B23^2-10	=C23^3-C23^2-10	=D
24	=A23+1	=SI(H23=1;SI(G23*E23>0;D23;B23);"error")	=SI(H23=1;SI(G23*F23>0;D23;C23);"error")	=(B24+C24)/2	=B24^3-B24^2-10	=C24^3-C24^2-10	=D
25	=A24+1	=SI(H24=1;SI(G24*E24>0;D24;B24);"error")	=SI(H24=1;SI(G24*F24>0;D24;C24);"error")	=(B25+C25)/2	=B25^3-B25^2-10	=C25^3-C25^2-10	=D
26	=A25+1	=SI(H25=1;SI(G25*E25>0;D25;B25);"error")	=SI(H25=1;SI(G25*F25>0;D25;C25);"error")	=(B26+C26)/2	=B26^3-B26^2-10	=C26^3-C26^2-10	=D
27	=A26+1	=SI(H26=1;SI(G26*E26>0;D26;B26);"error")	=SI(H26=1;SI(G26*F26>0;D26;C26);"error")	=(B27+C27)/2	=B27^3-B27^2-10	=C27^3-C27^2-10	=D
28	=A27+1	=SI(H27=1;SI(G27*E27>0;D27;B27);"error")	=SI(H27=1;SI(G27*F27>0;D27;C27);"error")	=(B28+C28)/2	=B28^3-B28^2-10	=C28^3-C28^2-10	=D
29	=A28+1	=SI(H28=1;SI(G28*E28>0;D28;B28);"error")	=SI(H28=1;SI(G28*F28>0;D28;C28);"error")	=(B29+C29)/2	=B29^3-B29^2-10	=C29^3-C29^2-10	=D
30	=A29+1	=SI(H29=1;SI(G29*E29>0;D29;B29);"error")	=SI(H29=1;SI(G29*F29>0;D29;C29);"error")	=(B30+C30)/2	=B30^3-B30^2-10	=C30^3-C30^2-10	=D
31	=A30+1	=SI(H30=1;SI(G30*E30>0;D30;B30);"error")	=SI(H30=1;SI(G30*F30>0;D30;C30);"error")	=(B31+C31)/2	=B31^3-B31^2-10	=C31^3-C31^2-10	=D
32	=A31+1	=SI(H31=1;SI(G31*E31>0;D31;B31);"error")	=SI(H31=1;SI(G31*F31>0;D31;C31);"error")	=(B32+C32)/2	=B32^3-B32^2-10	=C32^3-C32^2-10	=D
33	=A32+1	=SI(H32=1;SI(G32*E32>0;D32;B32);"error")	=SI(H32=1;SI(G32*F32>0;D32;C32);"error")	=(B33+C33)/2	=B33^3-B33^2-10	=C33^3-C33^2-10	=D
34	=A33+1	=SI(H33=1;SI(G33*E33>0;D33;B33);"error")	=SI(H33=1;SI(G33*F33>0;D33;C33);"error")	=(B34+C34)/2	=B34^3-B34^2-10	=C34^3-C34^2-10	=D
35	=A34+1	=SI(H34=1;SI(G34*E34>0;D34;B34);"error")	=SI(H34=1;SI(G34*F34>0;D34;C34);"error")	=(B35+C35)/2	=B35^3-B35^2-10	=C35^3-C35^2-10	=D
36	=A35+1	=SI(H35=1;SI(G35*E35>0;D35;B35);"error")	=SI(H35=1;SI(G35*F35>0;D35;C35);"error")	=(B36+C36)/2	=B36^3-B36^2-10	=C36^3-C36^2-10	=D
37	=A36+1	=SI(H36=1;SI(G36*E36>0;D36;B36);"error")	=SI(H36=1;SI(G36*F36>0;D36;C36);"error")	=(B37+C37)/2	=B37^3-B37^2-10	=C37^3-C37^2-10	=D
38	=A37+1	=SI(H37=1;SI(G37*E37>0;D37;B37);"error")	=SI(H37=1;SI(G37*F37>0;D37;C37);"error")	=(B38+C38)/2	=B38^3-B38^2-10	=C38^3-C38^2-10	=D
39	=A38+1	=SI(H38=1;SI(G38*E38>0;D38;B38);"error")	=SI(H38=1;SI(G38*F38>0;D38;C38);"error")	=(B39+C39)/2	=B39^3-B39^2-10	=C39^3-C39^2-10	=D
40	=A39+1	=SI(H39=1;SI(G39*E39>0;D39;B39);"error")	=SI(H39=1;SI(G39*F39>0;D39;C39);"error")	=(B40+C40)/2	=B40^3-B40^2-10	=C40^3-C40^2-10	=D
41	=A40+1	=SI(H40=1;SI(G40*E40>0;D40;B40);"error")	=SI(H40=1;SI(G40*F40>0;D40;C40);"error")	=(B41+C41)/2	=B41^3-B41^2-10	=C41^3-C41^2-10	=D
42	=A41+1	=SI(H41=1;SI(G41*E41>0;D41;B41);"error")	=SI(H41=1;SI(G41*F41>0;D41;C41);"error")	=(B42+C42)/2	=B42^3-B42^2-10	=C42^3-C42^2-10	=D

Imagen 2

1.- **La columna A** corresponde al número de iteraciones realizadas: comienza en el cero.

2.- **La columna B** corresponde con los valores de los extremos inferiores de los intervalos de inspección : a_n . Sólo en la celda B12 el usuario tiene que incorporar el valor del extremo inferior del intervalo inicial; a_0 . En filas posteriores se testa si el producto $f(a_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0$ esto se realiza en la columna H, en caso afirmativo se introduce un 1 y en caso negativo un cero. Esta es la causa del condicional, si estamos en las hipótesis del teorema de Bolzano continuamos, en caso contrario la celda indica que hay un error que el usuario debe detectar.

A continuación testa el signo de $f(a_{n-1})\cdot f(c_{n-1})$, si es positivo se considera el extremo inferior del nuevo intervalo como el punto medio del intervalo anterior, es decir, $a_n = c_{n-1}$ descartando el subintervalo (a_{n-1}, c_{n-1}) y pasando a estudiar la función en el intervalo $(c_{n-1}, b_{n-1}) = (a_n, b_n)$. Si el signo de $f(a_{n-1})\cdot f(c_{n-1})$ es negativo se considera el extremo inferior del nuevo intervalo como el punto medio del intervalo anterior, es decir, $b_n = c_{n-1}$ descartando el subintervalo (c_{n-1}, b_{n-1}) y pasando a estudiar la función en el intervalo $(a_{n-1}, c_{n-1}) = (a_n, b_n)$. Todo esto está incorporado en la fórmula :=SI(H12=1;SI(G12*E12>0;D12;B12);"error").

3.- **La columna C** corresponde con los valores de los extremos superiores de los intervalos de inspección : b_n .Sólo en la celda C12 el usuario tiene que incorporar el valor del extremo superior del intervalo inicial; b_0 .El proceso es idéntico y está descrito por la fórmula: =SI(H12=1;SI(G12*F12>0;D12;C12);"error").

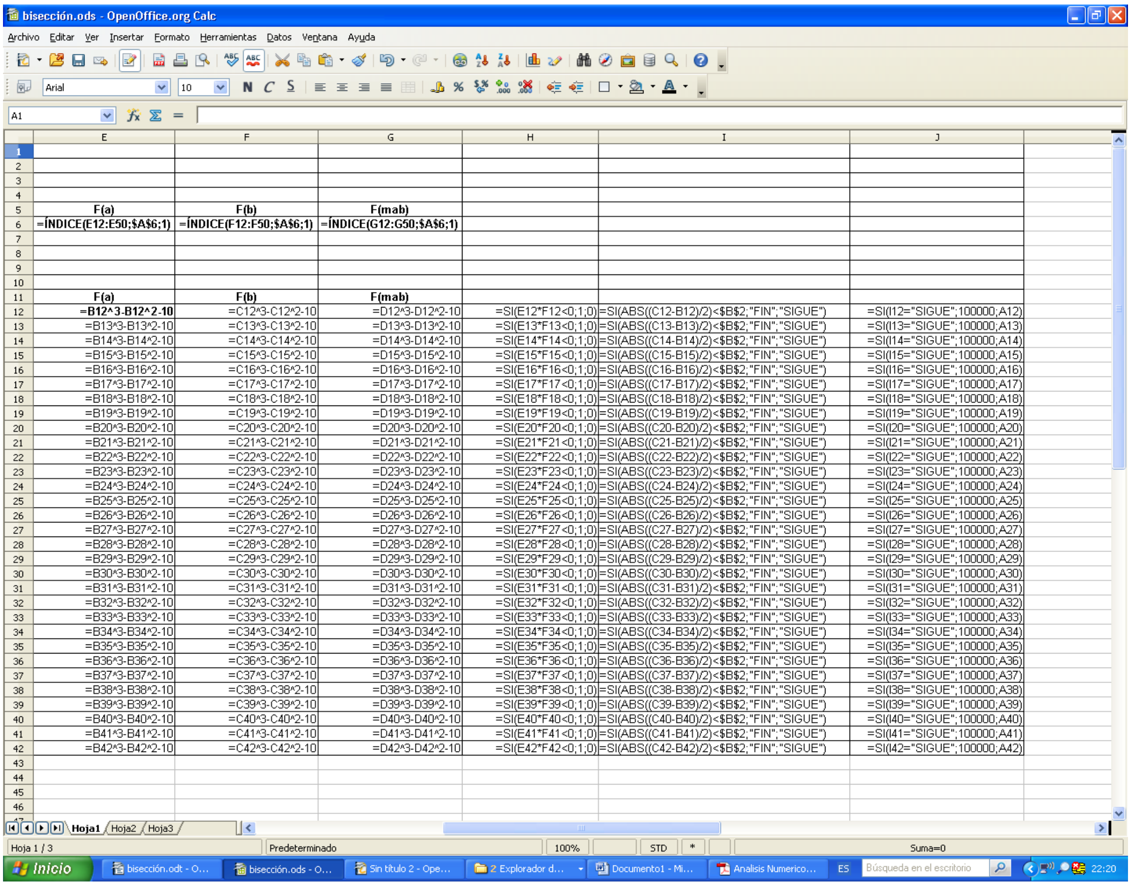
4.- **La columna D** corresponde con los valores de los puntos medios de los intervalos de inspección $[a_n, b_n]$: $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ cuya fórmula es =(B12+C12)/2 .

5.- **La columna E** Las imágenes de los extremos inferiores $f(a_n)$

6.- **La columna F** Las imágenes de los extremos superiores $f(b_n)$ debe observarse que los valores de la columna E y F en una misma fila deben tener signos opuestos.

7.- **La columna G** Las imágenes de los puntos medios de los extremos del intervalo

$f(c_n) = f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ .Estas últimas columnas: E,F y G, deben ser modificadas a partir de la fila 12 cada vez que se modifique la ecuación a resolver, asimismo los valores del intervalo en el que deseamos determinar la raíz de la ecuación.



	E	F	G	H	I	J
1						
2						
3						
4						
5	**F(a)**	**F(b)**	**F(mab)**			
6	=ÍNDICE(E12:E50;A6;1)	=ÍNDICE(F12:F50;A6;1)	=ÍNDICE(G12:G50;A6;1)			
7						
8						
9						
10						
11	**F(a)**	**F(b)**	**F(mab)**			
12	**=B12^3-B12^2-10**	=C12^3-C12^2-10	=D12^3-D12^2-10	=SI(E12*F12<0;1;0)	=SI(ABS((C12-B12)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I12="SIGUE";100000;A12)
13	=B13^3-B13^2-10	=C13^3-C13^2-10	=D13^3-D13^2-10	=SI(E13*F13<0;1;0)	=SI(ABS((C13-B13)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I13="SIGUE";100000;A13)
14	=B14^3-B14^2-10	=C14^3-C14^2-10	=D14^3-D14^2-10	=SI(E14*F14<0;1;0)	=SI(ABS((C14-B14)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I14="SIGUE";100000;A14)
15	=B15^3-B15^2-10	=C15^3-C15^2-10	=D15^3-D15^2-10	=SI(E15*F15<0;1;0)	=SI(ABS((C15-B15)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I15="SIGUE";100000;A15)
16	=B16^3-B16^2-10	=C16^3-C16^2-10	=D16^3-D16^2-10	=SI(E16*F16<0;1;0)	=SI(ABS((C16-B16)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I16="SIGUE";100000;A16)
17	=B17^3-B17^2-10	=C17^3-C17^2-10	=D17^3-D17^2-10	=SI(E17*F17<0;1;0)	=SI(ABS((C17-B17)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I17="SIGUE";100000;A17)
18	=B18^3-B18^2-10	=C18^3-C18^2-10	=D18^3-D18^2-10	=SI(E18*F18<0;1;0)	=SI(ABS((C18-B18)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I18="SIGUE";100000;A18)
19	=B19^3-B19^2-10	=C19^3-C19^2-10	=D19^3-D19^2-10	=SI(E19*F19<0;1;0)	=SI(ABS((C19-B19)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I19="SIGUE";100000;A19)
20	=B20^3-B20^2-10	=C20^3-C20^2-10	=D20^3-D20^2-10	=SI(E20*F20<0;1;0)	=SI(ABS((C20-B20)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I20="SIGUE";100000;A20)
21	=B21^3-B21^2-10	=C21^3-C21^2-10	=D21^3-D21^2-10	=SI(E21*F21<0;1;0)	=SI(ABS((C21-B21)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I21="SIGUE";100000;A21)
22	=B22^3-B22^2-10	=C22^3-C22^2-10	=D22^3-D22^2-10	=SI(E22*F22<0;1;0)	=SI(ABS((C22-B22)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I22="SIGUE";100000;A22)
23	=B23^3-B23^2-10	=C23^3-C23^2-10	=D23^3-D23^2-10	=SI(E23*F23<0;1;0)	=SI(ABS((C23-B23)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I23="SIGUE";100000;A23)
24	=B24^3-B24^2-10	=C24^3-C24^2-10	=D24^3-D24^2-10	=SI(E24*F24<0;1;0)	=SI(ABS((C24-B24)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I24="SIGUE";100000;A24)
25	=B25^3-B25^2-10	=C25^3-C25^2-10	=D25^3-D25^2-10	=SI(E25*F25<0;1;0)	=SI(ABS((C25-B25)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I25="SIGUE";100000;A25)
26	=B26^3-B26^2-10	=C26^3-C26^2-10	=D26^3-D26^2-10	=SI(E26*F26<0;1;0)	=SI(ABS((C26-B26)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I26="SIGUE";100000;A26)
27	=B27^3-B27^2-10	=C27^3-C27^2-10	=D27^3-D27^2-10	=SI(E27*F27<0;1;0)	=SI(ABS((C27-B27)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I27="SIGUE";100000;A27)
28	=B28^3-B28^2-10	=C28^3-C28^2-10	=D28^3-D28^2-10	=SI(E28*F28<0;1;0)	=SI(ABS((C28-B28)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I28="SIGUE";100000;A28)
29	=B29^3-B29^2-10	=C29^3-C29^2-10	=D29^3-D29^2-10	=SI(E29*F29<0;1;0)	=SI(ABS((C29-B29)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I29="SIGUE";100000;A29)
30	=B30^3-B30^2-10	=C30^3-C30^2-10	=D30^3-D30^2-10	=SI(E30*F30<0;1;0)	=SI(ABS((C30-B30)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I30="SIGUE";100000;A30)
31	=B31^3-B31^2-10	=C31^3-C31^2-10	=D31^3-D31^2-10	=SI(E31*F31<0;1;0)	=SI(ABS((C31-B31)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I31="SIGUE";100000;A31)
32	=B32^3-B32^2-10	=C32^3-C32^2-10	=D32^3-D32^2-10	=SI(E32*F32<0;1;0)	=SI(ABS((C32-B32)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I32="SIGUE";100000;A32)
33	=B33^3-B33^2-10	=C33^3-C33^2-10	=D33^3-D33^2-10	=SI(E33*F33<0;1;0)	=SI(ABS((C33-B33)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I33="SIGUE";100000;A33)
34	=B34^3-B34^2-10	=C34^3-C34^2-10	=D34^3-D34^2-10	=SI(E34*F34<0;1;0)	=SI(ABS((C34-B34)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I34="SIGUE";100000;A34)
35	=B35^3-B35^2-10	=C35^3-C35^2-10	=D35^3-D35^2-10	=SI(E35*F35<0;1;0)	=SI(ABS((C35-B35)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I35="SIGUE";100000;A35)
36	=B36^3-B36^2-10	=C36^3-C36^2-10	=D36^3-D36^2-10	=SI(E36*F36<0;1;0)	=SI(ABS((C36-B36)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I36="SIGUE";100000;A36)
37	=B37^3-B37^2-10	=C37^3-C37^2-10	=D37^3-D37^2-10	=SI(E37*F37<0;1;0)	=SI(ABS((C37-B37)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I37="SIGUE";100000;A37)
38	=B38^3-B38^2-10	=C38^3-C38^2-10	=D38^3-D38^2-10	=SI(E38*F38<0;1;0)	=SI(ABS((C38-B38)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I38="SIGUE";100000;A38)
39	=B39^3-B39^2-10	=C39^3-C39^2-10	=D39^3-D39^2-10	=SI(E39*F39<0;1;0)	=SI(ABS((C39-B39)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I39="SIGUE";100000;A39)
40	=B40^3-B40^2-10	=C40^3-C40^2-10	=D40^3-D40^2-10	=SI(E40*F40<0;1;0)	=SI(ABS((C40-B40)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I40="SIGUE";100000;A40)
41	=B41^3-B41^2-10	=C41^3-C41^2-10	=D41^3-D41^2-10	=SI(E41*F41<0;1;0)	=SI(ABS((C41-B41)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I41="SIGUE";100000;A41)
42	=B42^3-B42^2-10	=C42^3-C42^2-10	=D42^3-D42^2-10	=SI(E42*F42<0;1;0)	=SI(ABS((C42-B42)/2)<B2;"FIN";"SIGUE")	=SI(I42="SIGUE";100000;A42)
43						
44						
45						
46						

Imagen 3

8.- **La columna H** Testa si se cumple $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$, de gran importancia para la elección en la etapa siguiente,en esta hoja de cálculo, la fila siguiente.

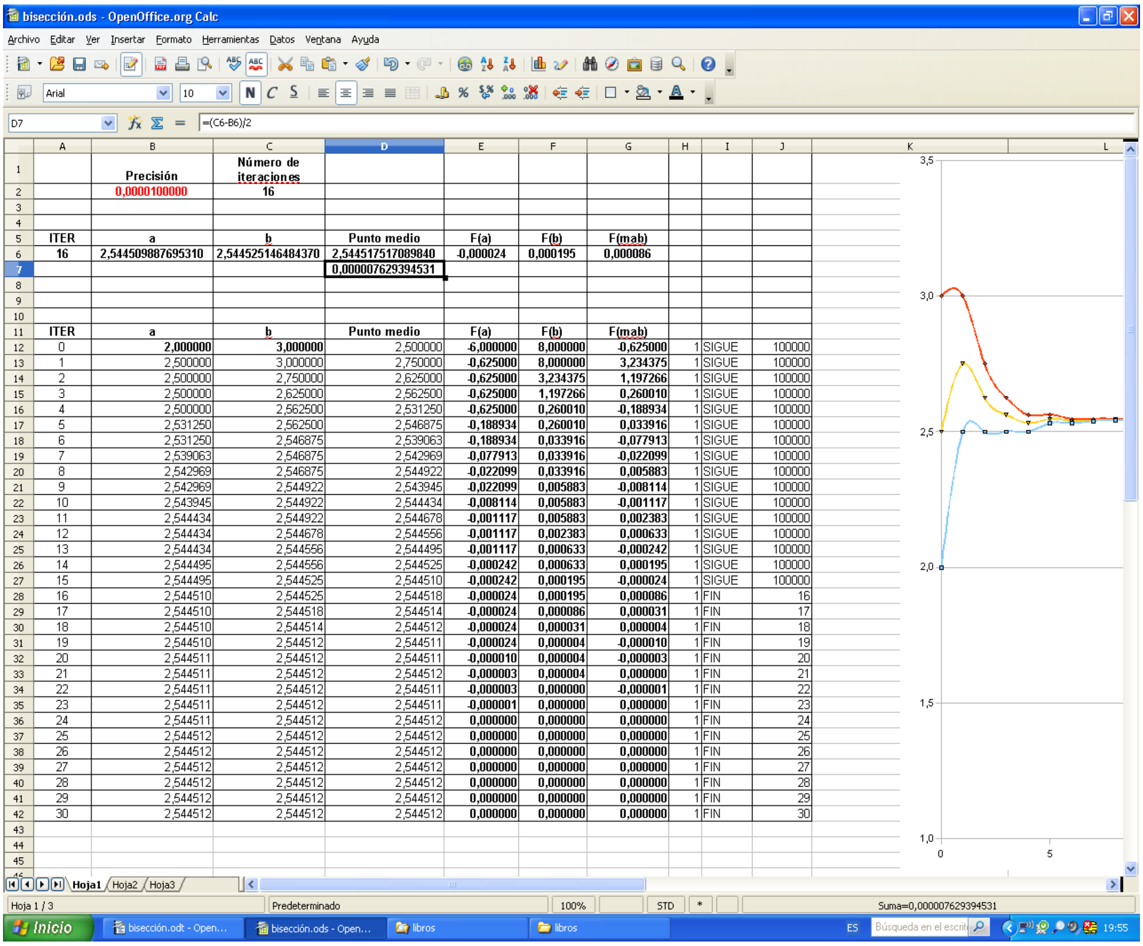
9.- **La columna I** Testa si la semidiferencia entre los extremos del intervalo (a_n,b_n) es inferior a la precisión, en caso afirmativo indica la etiqueta de FIN indicando que ya se ha obtenido la precisión deseada.

10.- **La columna J** Ofrece un número muy alto, 10.000, si no se ha alcanzado la precisión y el valor de la etapa en la que se encuentra si se ha alcanzado la precisión. Esto se utiliza para encontrar el mínimo de la columna J que será la primera iteración en la que se cumple la precisión buscada, aunque coincide con el valor del n_0 determinado por la fórmula (1).

6.Resultados

Ejemplo 1

Los resultados de la solución de la ecuación $x^3-x^2-10=0 \quad x\in[2,3]$ vienen dados en la tabla siguiente. La aproximación obtenida para la precisión fijada de $\delta=0{,}00001=10^{-5}$, es $c_{16}=\tilde{x}=2{,}54451751708984$, las iteraciones necesarias han sido 16 y la precisión obtenida es $0{,}00000763=7{,}63\cdot10^{-6}$.



	Precisión	Número de iteraciones				
	0,0000100000	16				

ITER	a	b	Punto medio	F(a)	F(b)	F(mab)
16	2,544509887695310	2,544525146484370	2,544517517089840	-0,000024	0,000195	0,000086
			0,000007629394531			

ITER	a	b	Punto medio	F(a)	F(b)	F(mab)			
0	2,000000	3,000000	2,500000	-6,000000	8,000000	-0,625000	1	SIGUE	100000
1	2,500000	3,000000	2,750000	-0,625000	8,000000	3,234375	1	SIGUE	100000
2	2,500000	2,750000	2,625000	-0,625000	3,234375	1,197266	1	SIGUE	100000
3	2,500000	2,625000	2,562500	-0,625000	1,197266	0,260010	1	SIGUE	100000
4	2,500000	2,562500	2,531250	-0,625000	0,260010	-0,188934	1	SIGUE	100000
5	2,531250	2,562500	2,546875	-0,188934	0,260010	0,033916	1	SIGUE	100000
6	2,531250	2,546875	2,539063	-0,188934	0,033916	-0,077913	1	SIGUE	100000
7	2,539063	2,546875	2,542969	-0,077913	0,033916	-0,022099	1	SIGUE	100000
8	2,542969	2,546875	2,544922	-0,022099	0,033916	0,005883	1	SIGUE	100000
9	2,542969	2,544922	2,543945	-0,022099	0,005883	-0,008114	1	SIGUE	100000
10	2,543945	2,544922	2,544434	-0,008114	0,005883	-0,001117	1	SIGUE	100000
11	2,544434	2,544922	2,544678	-0,001117	0,005883	0,002383	1	SIGUE	100000
12	2,544434	2,544678	2,544556	-0,001117	0,002383	0,000633	1	SIGUE	100000
13	2,544434	2,544556	2,544495	-0,001117	0,000633	-0,000242	1	SIGUE	100000
14	2,544495	2,544556	2,544525	-0,000242	0,000633	0,000195	1	SIGUE	100000
15	2,544495	2,544525	2,544510	-0,000242	0,000195	-0,000024	1	SIGUE	100000
16	2,544510	2,544525	2,544518	-0,000024	0,000195	0,000086	1	FIN	16
17	2,544510	2,544518	2,544514	-0,000024	0,000086	0,000031	1	FIN	17
18	2,544510	2,544514	2,544512	-0,000024	0,000031	0,000004	1	FIN	18
19	2,544510	2,544512	2,544511	-0,000024	0,000004	-0,000010	1	FIN	19
20	2,544511	2,544512	2,544511	-0,000010	0,000004	-0,000003	1	FIN	20
21	2,544511	2,544512	2,544512	-0,000003	0,000004	0,000000	1	FIN	21
22	2,544511	2,544512	2,544511	-0,000003	0,000000	-0,000001	1	FIN	22
23	2,544511	2,544512	2,544511	-0,000001	0,000000	0,000000	1	FIN	23
24	2,544511	2,544512	2,544512	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	24
25	2,544512	2,544512	2,544512	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	25
26	2,544512	2,544512	2,544512	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	26
27	2,544512	2,544512	2,544512	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	27
28	2,544512	2,544512	2,544512	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	28
29	2,544512	2,544512	2,544512	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	29
30	2,544512	2,544512	2,544512	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	30

Imagen 4

La gráfica que representa la tendencia de las tres sucesiones corresponde con la imagen 5, observe que se cumplen las desigualdades siguientes:

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq c_n \leq b_n \leq \ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0 \; \forall \, n \in N$$

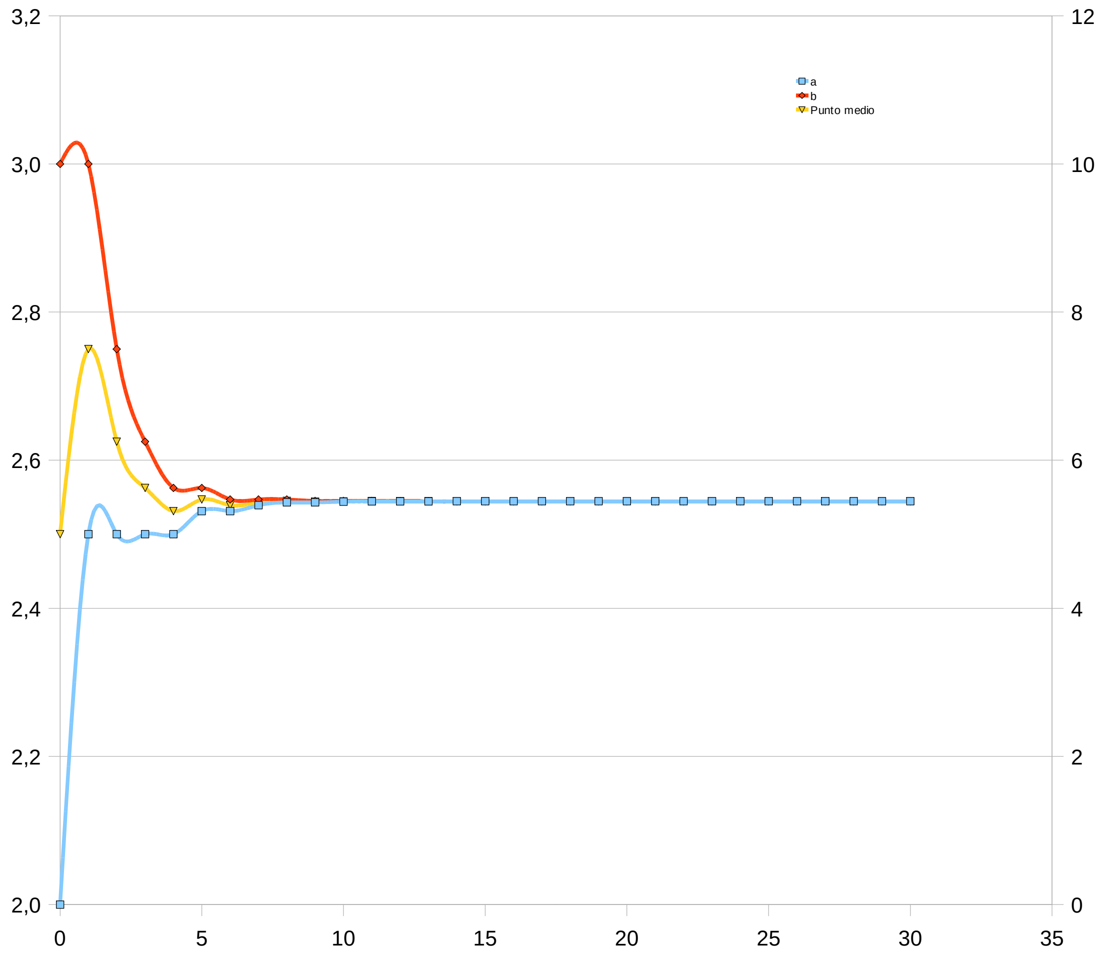


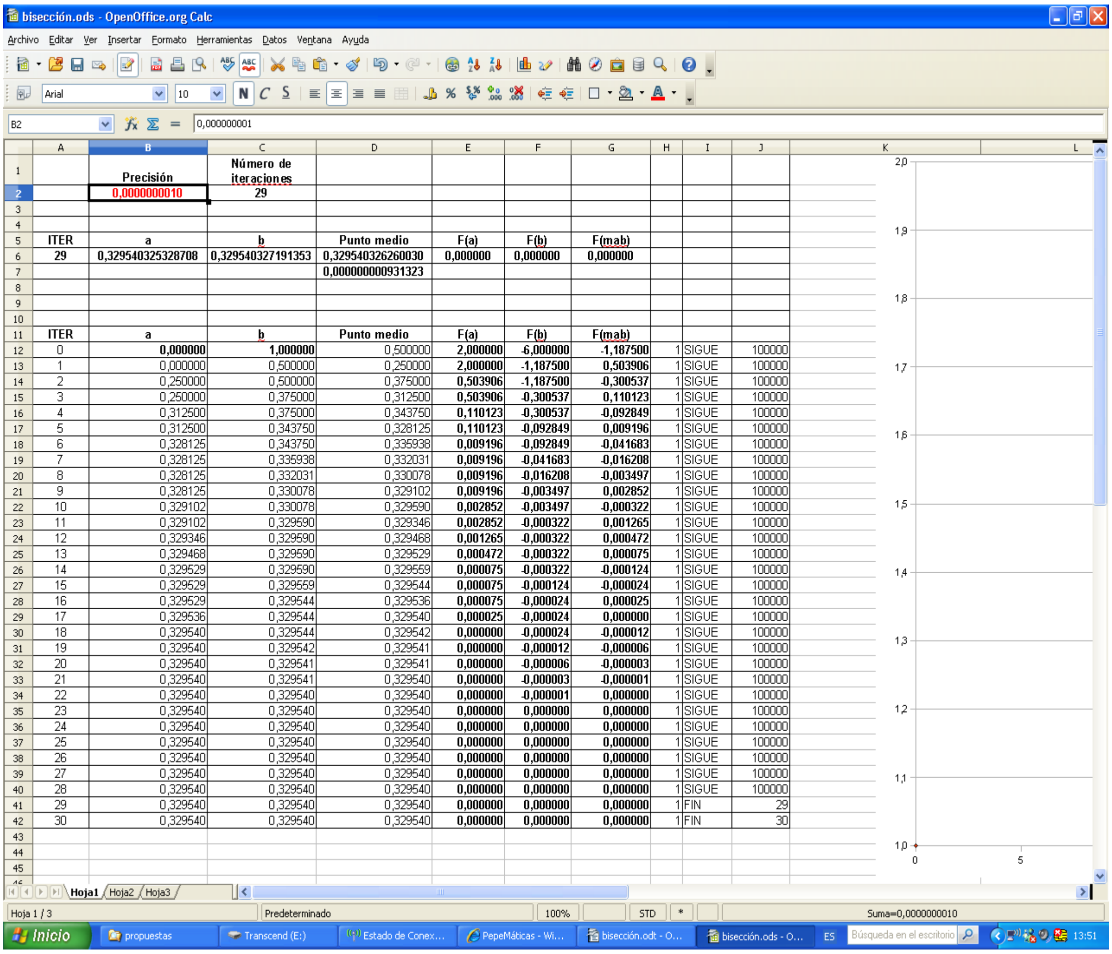
Imagen 5

Se puede observar la rapidez de la convergencia de las tres sucesiones y cómo la del punto medio, $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$,se encuentra justamente acotada por las sucesiones de extremos. .

Ejemplo 2

Los resultados de la solución de la ecuación $x^4 + 4 \cdot x^3 + x^2 - 6 \cdot x + 2 = 0 \quad x \in [1,2]$ vienen dados en la imagen 6. La aproximación obtenida para la precisión fijada de $\delta = 0{,}000000001 = 10^{-9}$, es

$c_{29} = \tilde{x} = 0{,}329540326260030$, las iteraciones necesarias han sido 29 y la precisión real obtenida es $0{,}000000000931323 = 9{,}31 \cdot 10^{-10}$

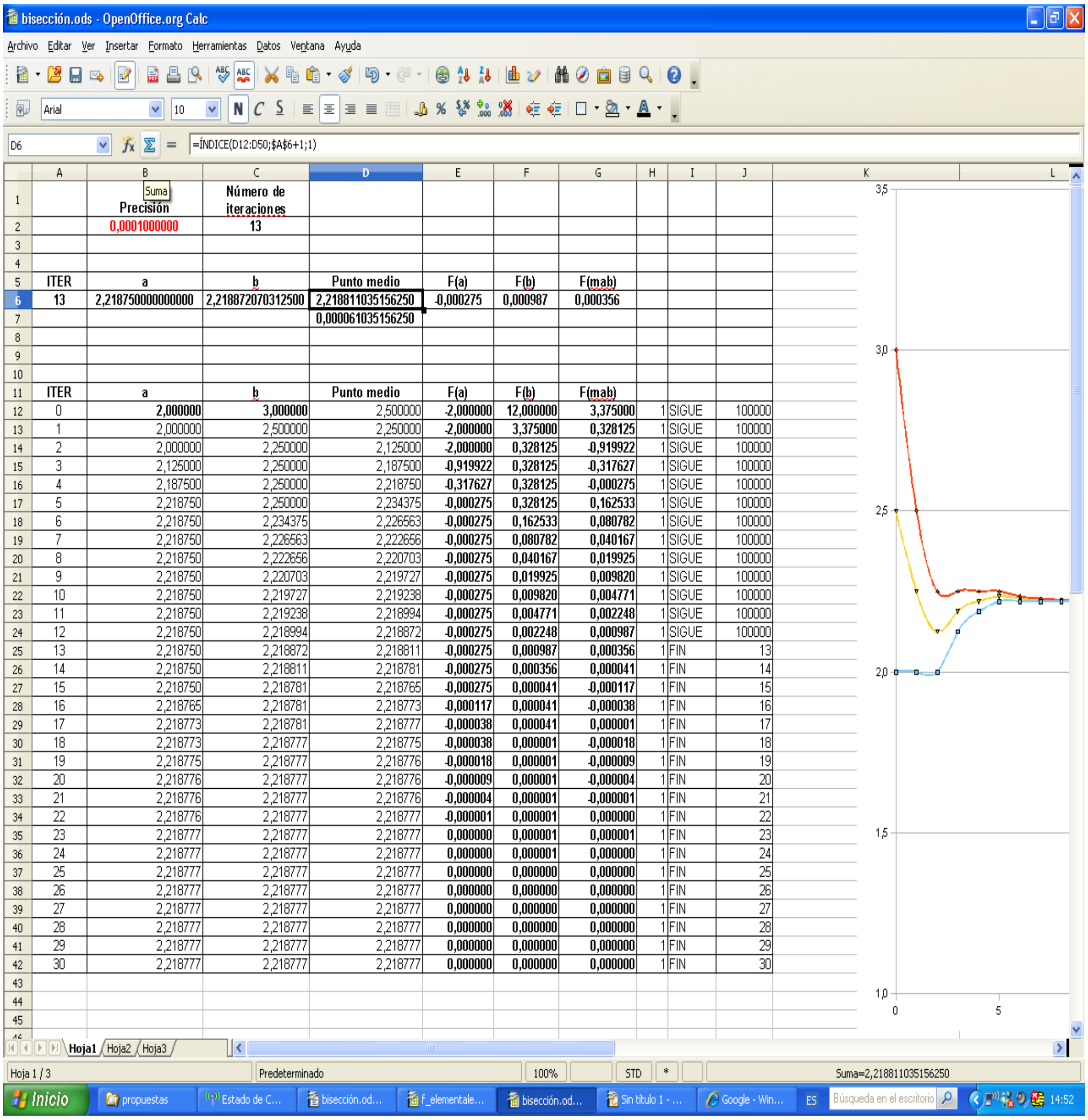


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Precisión	Número de iteraciones							
2		0,0000000010	29							
5	ITER	a	b	Punto medio	F(a)	F(b)	F(mab)			
6	29	0,329540325328708	0,329540327191353	0,329540326260030	0,000000	0,000000	0,000000			
7				0,000000000931323						
11	ITER	a	b	Punto medio	F(a)	F(b)	F(mab)			
12	0	0,000000	1,000000	0,500000	2,000000	-6,000000	-1,187500	1	SIGUE	100000
13	1	0,000000	0,500000	0,250000	2,000000	-1,187500	0,503906	1	SIGUE	100000
14	2	0,250000	0,500000	0,375000	0,503906	-1,187500	-0,300537	1	SIGUE	100000
15	3	0,250000	0,375000	0,312500	0,503906	-0,300537	0,110123	1	SIGUE	100000
16	4	0,312500	0,375000	0,343750	0,110123	-0,300537	-0,092849	1	SIGUE	100000
17	5	0,312500	0,343750	0,328125	0,110123	-0,092849	0,009196	1	SIGUE	100000
18	6	0,328125	0,343750	0,335938	0,009196	-0,092849	-0,041683	1	SIGUE	100000
19	7	0,328125	0,335938	0,332031	0,009196	-0,041683	-0,016208	1	SIGUE	100000
20	8	0,328125	0,332031	0,330078	0,009196	-0,016208	-0,003497	1	SIGUE	100000
21	9	0,328125	0,330078	0,329102	0,009196	-0,003497	0,002852	1	SIGUE	100000
22	10	0,329102	0,330078	0,329590	0,002852	-0,003497	-0,000322	1	SIGUE	100000
23	11	0,329102	0,329590	0,329346	0,002852	-0,000322	0,001265	1	SIGUE	100000
24	12	0,329346	0,329590	0,329468	0,001265	-0,000322	0,000472	1	SIGUE	100000
25	13	0,329468	0,329590	0,329529	0,000472	-0,000322	0,000075	1	SIGUE	100000
26	14	0,329529	0,329590	0,329559	0,000075	-0,000322	-0,000124	1	SIGUE	100000
27	15	0,329529	0,329559	0,329544	0,000075	-0,000124	-0,000024	1	SIGUE	100000
28	16	0,329529	0,329544	0,329536	0,000075	-0,000024	0,000025	1	SIGUE	100000
29	17	0,329536	0,329544	0,329540	0,000025	-0,000024	0,000000	1	SIGUE	100000
30	18	0,329540	0,329544	0,329542	0,000000	-0,000024	-0,000012	1	SIGUE	100000
31	19	0,329540	0,329542	0,329541	0,000000	-0,000012	-0,000006	1	SIGUE	100000
32	20	0,329540	0,329541	0,329541	0,000000	-0,000006	-0,000003	1	SIGUE	100000
33	21	0,329540	0,329541	0,329540	0,000000	-0,000003	-0,000001	1	SIGUE	100000
34	22	0,329540	0,329540	0,329540	0,000000	-0,000001	0,000000	1	SIGUE	100000
35	23	0,329540	0,329540	0,329540	0,000000	0,000000	0,000000	1	SIGUE	100000
36	24	0,329540	0,329540	0,329540	0,000000	0,000000	0,000000	1	SIGUE	100000
37	25	0,329540	0,329540	0,329540	0,000000	0,000000	0,000000	1	SIGUE	100000
38	26	0,329540	0,329540	0,329540	0,000000	0,000000	0,000000	1	SIGUE	100000
39	27	0,329540	0,329540	0,329540	0,000000	0,000000	0,000000	1	SIGUE	100000
40	28	0,329540	0,329540	0,329540	0,000000	0,000000	0,000000	1	SIGUE	100000
41	29	0,329540	0,329540	0,329540	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	29
42	30	0,329540	0,329540	0,329540	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	30

Imagen 6

Ejemplo 3

Los resultados de la solución de la ecuación $x^3 - x^2 - 6 = 0 \quad x \in [2,3]$ vienen dados en la imagen 7. La aproximación obtenida para la precisión fijada de $\delta = 0{,}0001 = 10^{-4}$, es $c_{13} = \tilde{x} = 2{,}218811035156250$, las iteraciones necesarias han sido 13 y la precisión real obtenida es $0{,}000061035156250 = 6{,}10 \cdot 10^{-5}$



	Precisión	Número de iteraciones							
	0,0001000000	13							
ITER	a	b	Punto medio	F(a)	F(b)	F(mab)			
13	2,218750000000000	2,218872070312500	2,218811035156250	-0,000275	0,000987	0,000356			
			0,000061035156250						
ITER	a	b	Punto medio	F(a)	F(b)	F(mab)			
0	2,000000	3,000000	2,500000	-2,000000	12,000000	3,375000	1	SIGUE	100000
1	2,000000	2,500000	2,250000	-2,000000	3,375000	0,328125	1	SIGUE	100000
2	2,000000	2,250000	2,125000	-2,000000	0,328125	-0,919922	1	SIGUE	100000
3	2,125000	2,250000	2,187500	-0,919922	0,328125	-0,317627	1	SIGUE	100000
4	2,187500	2,250000	2,218750	-0,317627	0,328125	-0,000275	1	SIGUE	100000
5	2,218750	2,250000	2,234375	-0,000275	0,328125	0,162533	1	SIGUE	100000
6	2,218750	2,234375	2,226563	-0,000275	0,162533	0,080782	1	SIGUE	100000
7	2,218750	2,226563	2,222656	-0,000275	0,080782	0,040167	1	SIGUE	100000
8	2,218750	2,222656	2,220703	-0,000275	0,040167	0,019925	1	SIGUE	100000
9	2,218750	2,220703	2,219727	-0,000275	0,019925	0,009820	1	SIGUE	100000
10	2,218750	2,219727	2,219238	-0,000275	0,009820	0,004771	1	SIGUE	100000
11	2,218750	2,219238	2,218994	-0,000275	0,004771	0,002248	1	SIGUE	100000
12	2,218750	2,218994	2,218872	-0,000275	0,002248	0,000987	1	SIGUE	100000
13	2,218750	2,218872	2,218811	-0,000275	0,000987	0,000356	1	FIN	13
14	2,218750	2,218811	2,218781	-0,000275	0,000356	0,000041	1	FIN	14
15	2,218750	2,218781	2,218765	-0,000275	0,000041	-0,000117	1	FIN	15
16	2,218765	2,218781	2,218773	-0,000117	0,000041	-0,000038	1	FIN	16
17	2,218773	2,218781	2,218777	-0,000038	0,000041	0,000001	1	FIN	17
18	2,218773	2,218777	2,218775	-0,000038	0,000001	-0,000018	1	FIN	18
19	2,218775	2,218777	2,218776	-0,000018	0,000001	-0,000009	1	FIN	19
20	2,218776	2,218777	2,218776	-0,000009	0,000001	-0,000004	1	FIN	20
21	2,218776	2,218777	2,218776	-0,000004	0,000001	-0,000001	1	FIN	21
22	2,218776	2,218777	2,218777	-0,000001	0,000001	0,000000	1	FIN	22
23	2,218777	2,218777	2,218777	0,000000	0,000001	0,000001	1	FIN	23
24	2,218777	2,218777	2,218777	0,000000	0,000001	0,000000	1	FIN	24
25	2,218777	2,218777	2,218777	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	25
26	2,218777	2,218777	2,218777	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	26
27	2,218777	2,218777	2,218777	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	27
28	2,218777	2,218777	2,218777	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	28
29	2,218777	2,218777	2,218777	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	29
30	2,218777	2,218777	2,218777	0,000000	0,000000	0,000000	1	FIN	30

Imagen 7

En grafo de la imagen 8 se ha representado la función $f(x)=x^3-x^2-6 \quad x\in[2,3]$ y se puede observar la solución gráfica de la ecuación planteada en el ejercicio anterior.

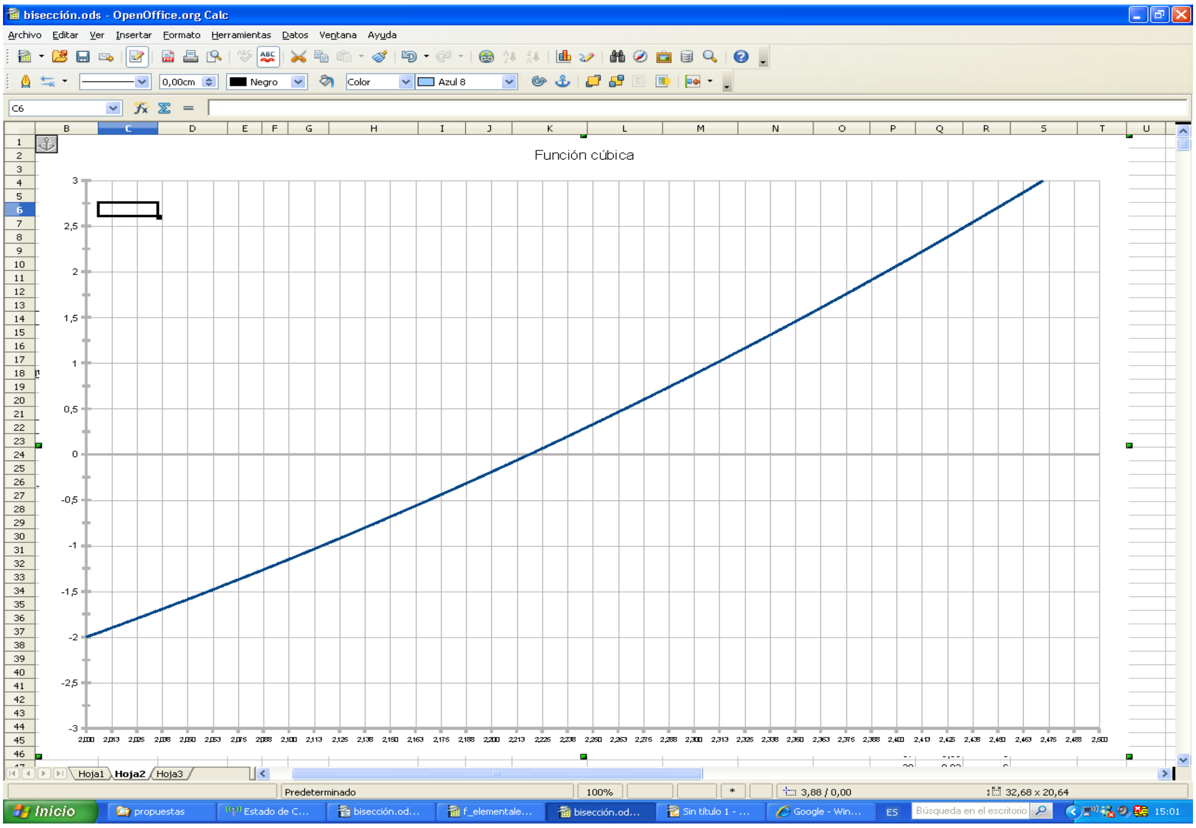


Imagen 8

7. Conclusiones

La hoja de cálculo por su versatilidad permite una eventual utilización en el aula, es mucho más transparente que el módulo solver, que también está disponible en la hoja de cálculo, que puede utilizarse para la resolución de ecuaciones. Además nos informa con detalle de las iteraciones y de sus resultados. Esta hoja no sólo indica cual es la iteración obtenida para una precisión indicada por el usuario, sino que puede determinar un número de iteraciones fijo (por ejemplo 30) que permite, en la mayoría de los casos, ofrecer aproximaciones mucho más finas que la necesitada por el usuario. Se pueden determinar más iteraciones con sólo copiar y pegar la última fila en las siguientes, evidentemente debería modificar el ancho de las columnas para poder ver todas las cifras decimales de las aproximaciones obtenidas.

8. Bibliografía

Tom M. Apostol, Calculus Editorial Reverté S.A. 1984 ISBN - 84-291-5002-1(España)
Louis Leithold, El Cálculo Oxford University Press ISBN -970-613-182-5